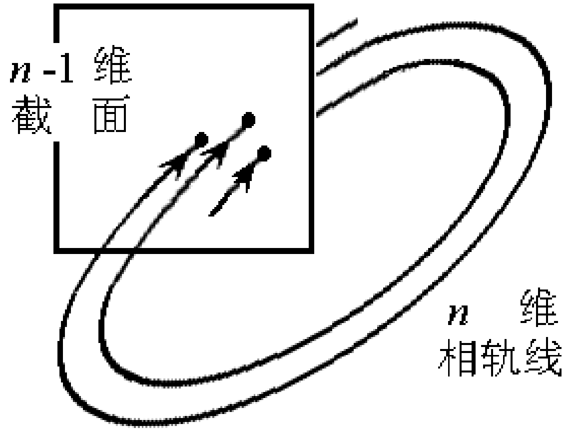
庞加莱映射：

- 相空间轨道方法是庞加莱建立，但是轨道形态仍然很复杂，这导致他提出庞加莱截面的概念。
- 在相空间取某一坐标为常数的截面，将相空间的轨迹演化简化成轨迹线与这一截面的交点在截面上的运动——缩小了一维！
- 设相空间是n维的，原则上可以取出一个(n-1)维相平面，称为庞加莱截面。
- 将这种时间上连续的运动转变为离散的图象处理方法称为庞加莱映射。

非线性物理：基础知识——相空间

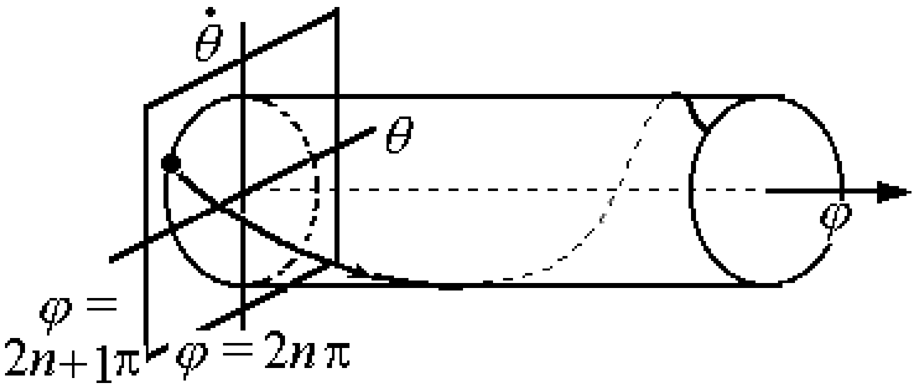


- 以阻尼单摆运动为例来说明问题：引入一个相位角$\boldsymbol{\varphi}$

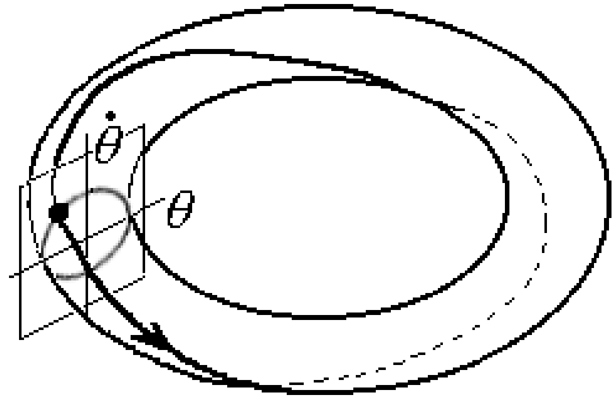
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\beta\frac{d\theta}{dt}+\omega^2\sin\theta=F\cos\nu t \quad \begin{cases}\dot{\theta}=\omega\\ \dot{\omega}=-2\beta\dot{\theta}-\sin\theta+F\cos\nu t\\ \dot{\varphi}=\nu\end{cases}$$

非线性物理：基础知识——相空间

- 运动相空间可以示意为：



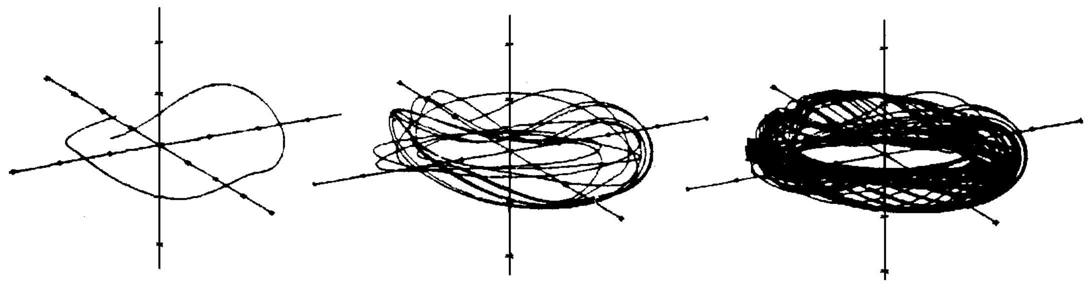
a



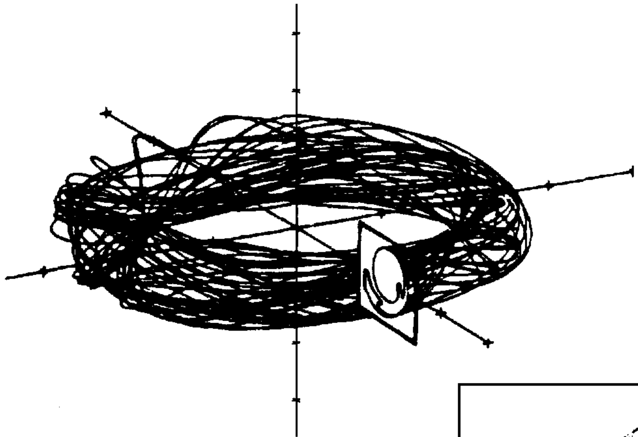
b

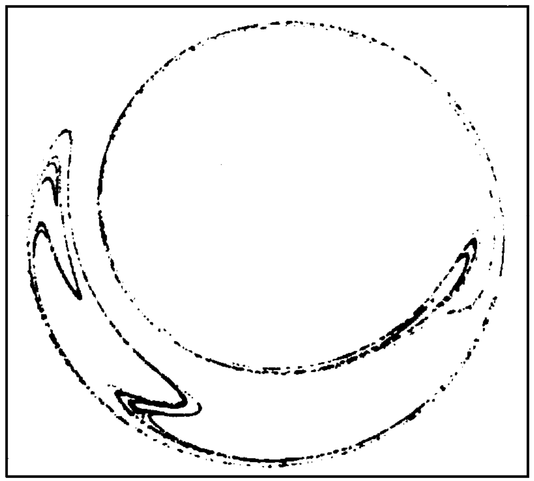
- 取某一个常数位相，等于在该位相处截取一个平面，环线在穿过该平面时就留下了一个点。如果运动单周期，轨线每次重复在原有轨道上，在截面上只留下一个点。如果是两倍周期，在截面上留下两个点。如果是无周期，轨线每次在截面上不同点穿过，截面上留下无穷多个点。

非线性物理：基础知识——相空间



- 这是混沌轨道经过截面1000次后留下的轨道图像。





以单摆为例：

- 再以带阻尼和周期驱动的单摆为例来说明庞加莱映射的应用。

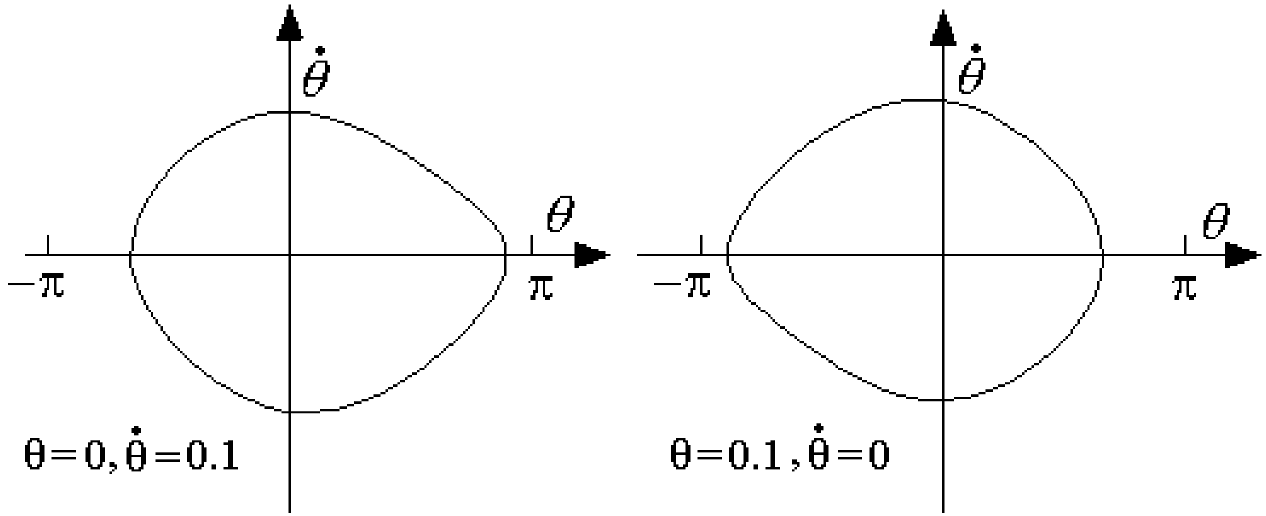
$$
\begin{cases}
\dot{\theta} = \omega \\
\dot{\omega} = -2\beta\dot{\theta} - \sin\theta + F\cos\nu t \\
\dot{\varphi} = \nu
\end{cases}
$$

- 在 ***F*** 很小时，预期长时间行为是小角度周期振动，所以：

$$
\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta\frac{d\theta}{dt} + \theta = F\cos\nu t \qquad \theta(t) = \frac{F}{\sqrt{(\omega^2-\nu^2)^2 + 4\beta^2\nu^2}}\cos(\nu t - \varphi)
$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{2\beta\nu}{\omega^2-\nu^2}\qquad \dot{\theta}(t)=\frac{-\nu F}{\sqrt{(\omega^2-\nu^2)^2+4\beta^2\nu^2}}\sin(\nu t-\varphi)$$

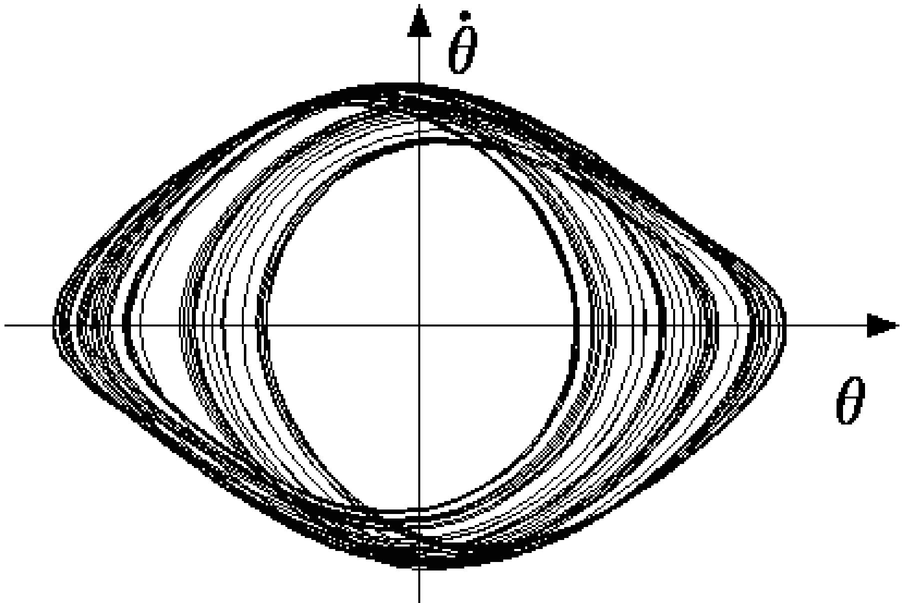
$$\theta^2+\left(\frac{\dot{\theta}}{\nu}\right)^2=\left(\frac{F}{\sqrt{(\omega^2-\nu^2)^2+4\beta^2\nu^2}}\right)^2$$



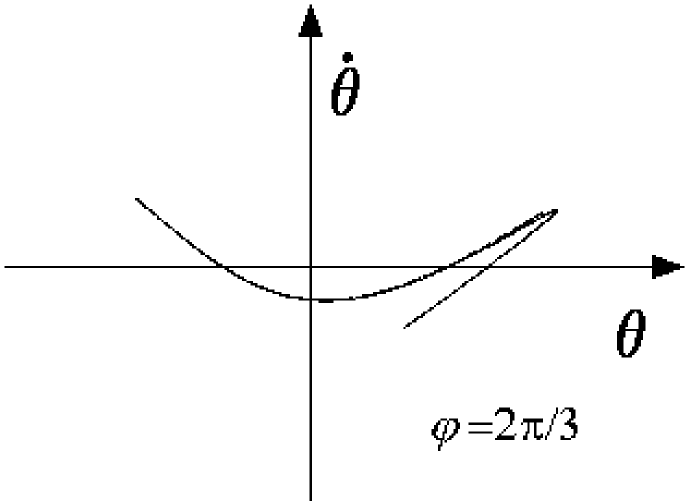
***F*=1.0521下在不同初始条件下的两条的相轨线，*β*=1/4, *ν*=2/3**

非线性物理：基础知识——相空间

- 再看看 ***F*** 稍微大一些的情况，这时要数值计算了：

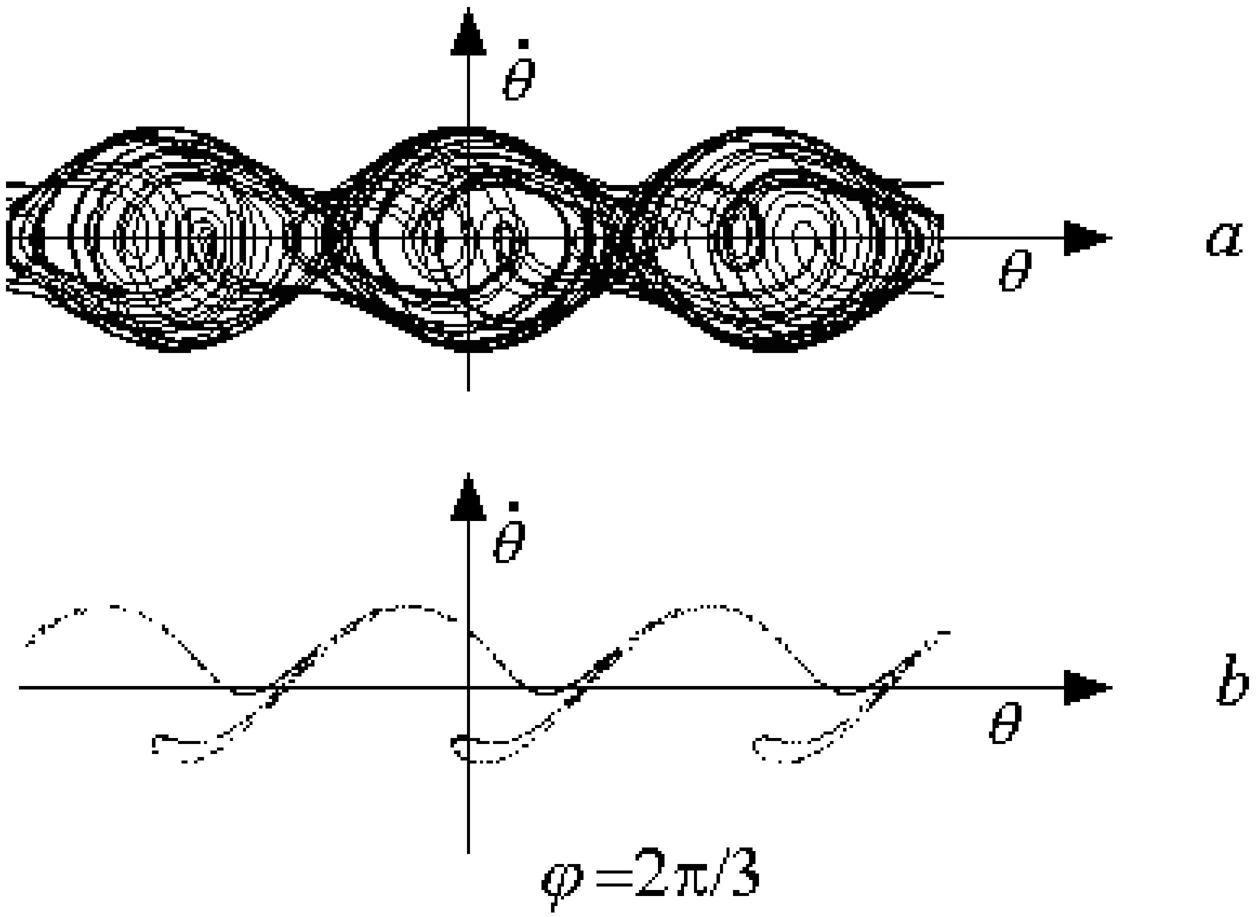


F=1.093



$\varphi=2\pi/3$

- 当 F 再增大到1.18时，庞加莱截面就可以显示轨线的美丽结构。



- 在分析混沌时这种相空间庞加莱截面的方法特别有用。

非线性物理：基础知识——相空间

- (p, q)第二象限。负阻尼+正恢复力，被$p^2=4q$分割：(1) λ是共轭复根且实部为正($|p|$较小)，(2) λ为两个正实数($|p|$较大)。(0, 0)为不稳定排斥子，称为不稳定焦点和不稳定结点。