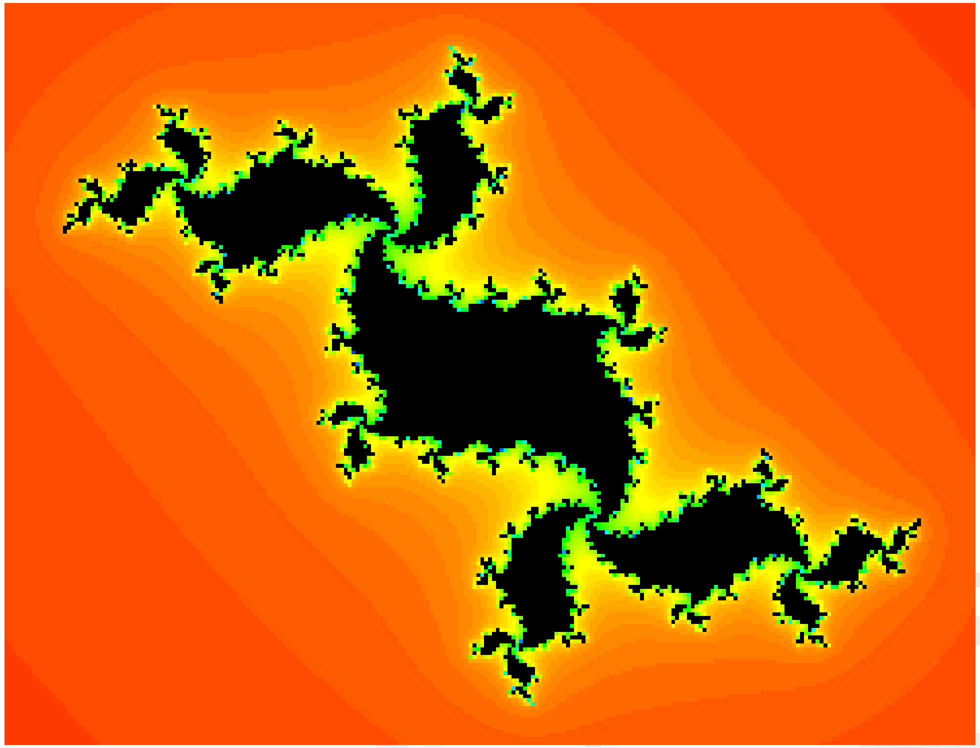
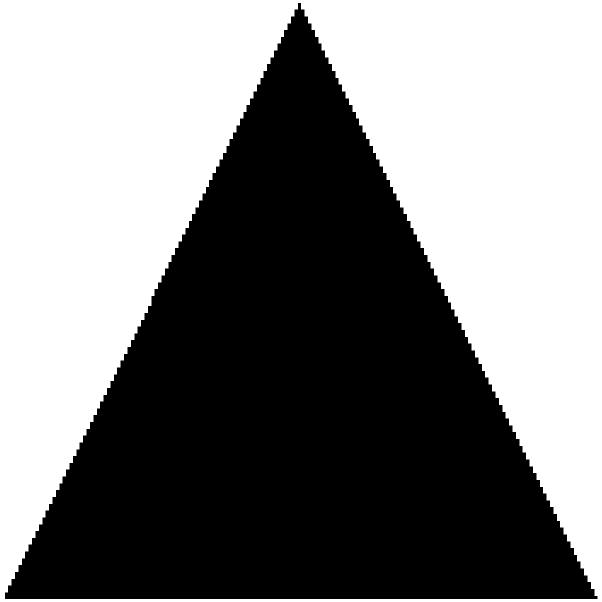
特征尺度问题：

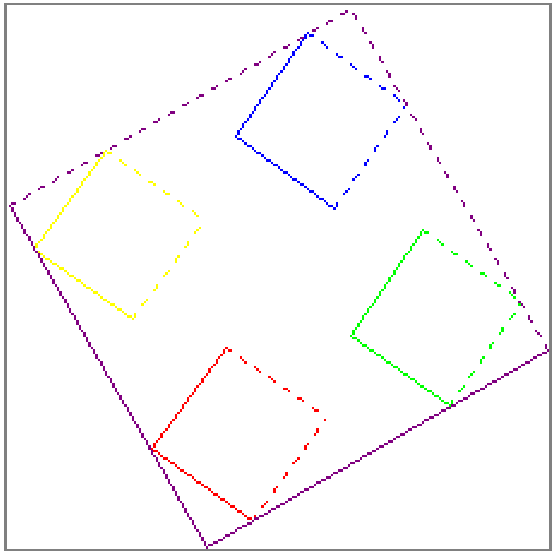
- 物理学家关注自然现象中的特征尺度，然后寻找数学描述方法！关注有序无序！
- 自然界的构造动力模式：规则和完全随机之间的！
- 规则构成导致所谓周期排列或者准周期排列，例如晶体、社会组织、军队方阵等等，都有特征尺度。从形成动力学看，是近平衡生长或者组织形成的。
- 自然界随机过程和现象更加广泛：没有特征尺度！

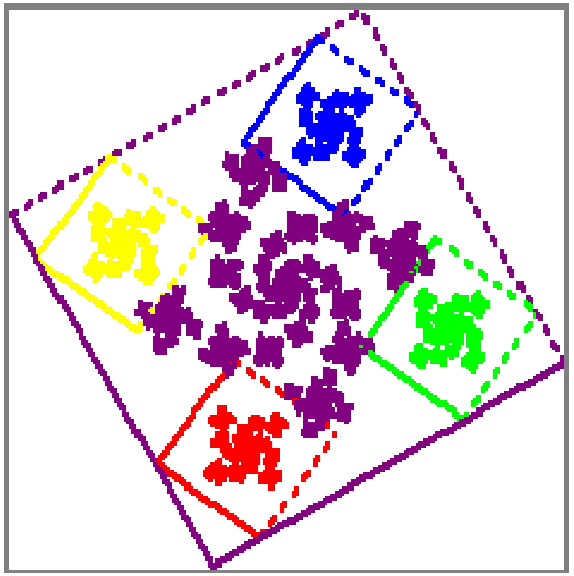
非线性物理：分形物理





非线性物理：分形物理





非线性物理：分形物理

$$
(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases}
(0, 0.16y_n), & 0.00 < r < 0.01 \\
(0.2x_n - 0.26y_n, 0.23x_n + 0.22y_n + 0.2), & 0.01 < r < 0.08 \\
(-0.15x_n + 0.28y_n, 0.26x_n + 0.24y_n + 0.2), & 0.08 < r < 0.15 \\
(0.85x_n + 0.04y_n, -0.04x_n + 0.85y_n + 0.2), & 0.15 < r < 1.00
\end{cases}
$$

分形维：

- 这类没有特征尺度的物体成为分形体。既然没有特征尺度，如何去描述它的几何特征？以**Koch**曲线为例：

- 对单位长度线段，无论用何种尺度 δ 去测量，其长度 L 均为1：

$$L = \delta^0 = 1$$

- 用 **δ=1/3** 尺度测量，小于 δ 的弯曲部分被遗弃，***L*(δ=1/3)=4/3**；依此类推：

$$L\left(\delta=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^{n}=N\cdot\delta$$

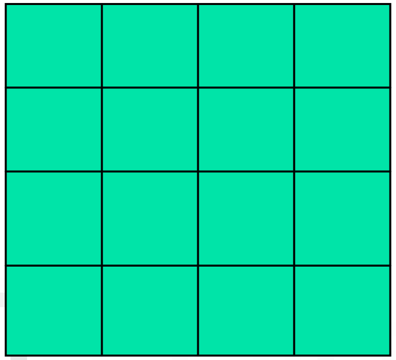
- 根据维度定义，应该有：$L=\delta^{\mu}=N\delta$，这里μ是余数维。因此，$(4/3)^{n}=(1/3)^{n\mu}=N\delta$，所以有：$\mu=1-\ln 4/\ln 3=-0.2618$，定义$\mu=1-D_H$，有$D_H$=**ln4/ln3=1.2618**，称为**Hausdorff**分形维。

$$N=\delta^{-D_H}$$

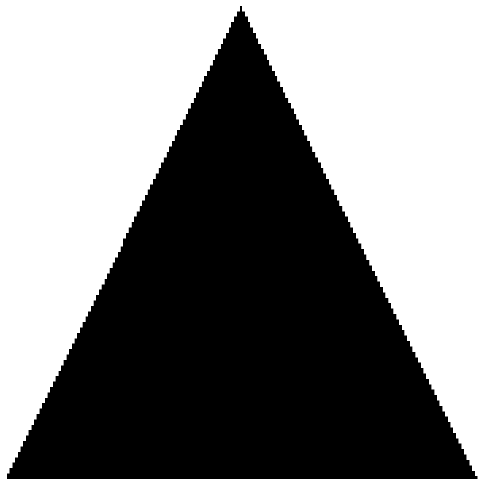
$$D_H=\ln N/(\ln\delta^{-1})$$

非线性物理：分形物理

- 对一个正方体：$N \sim \delta^2$，所以D_H=2.0。对于一个立方体：$N \sim \delta^3$，所以D_H=3.0。



- 如图所示的Sierpinski三角形，映射到第n步，$\delta=(1/2)^n=2^{-n}$，而相应的面积单元数目$N=3^n$。所以，维度D_H为：

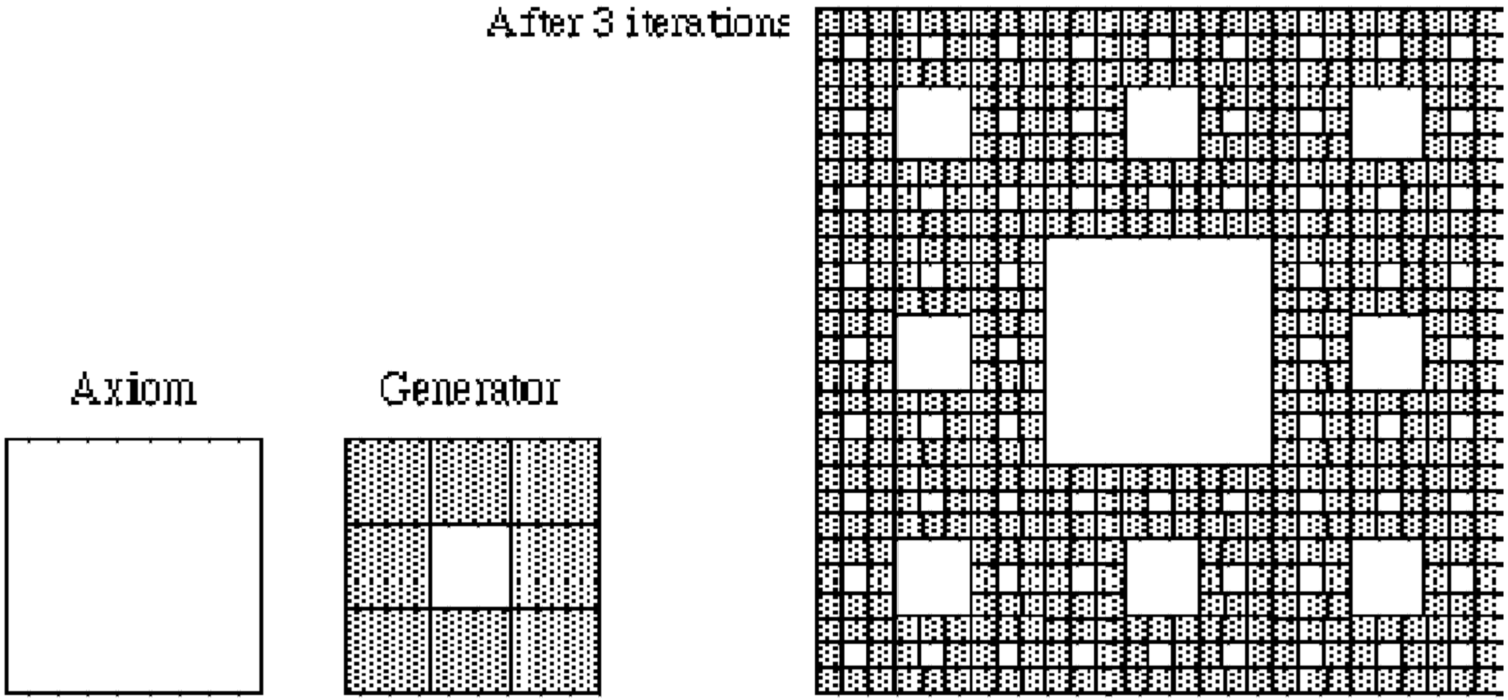


$$N \sim \delta^{-D_H} \Rightarrow 3^n \sim 2^{n \cdot D_H} \Rightarrow n \ln 3 = nD_H \ln 2$$

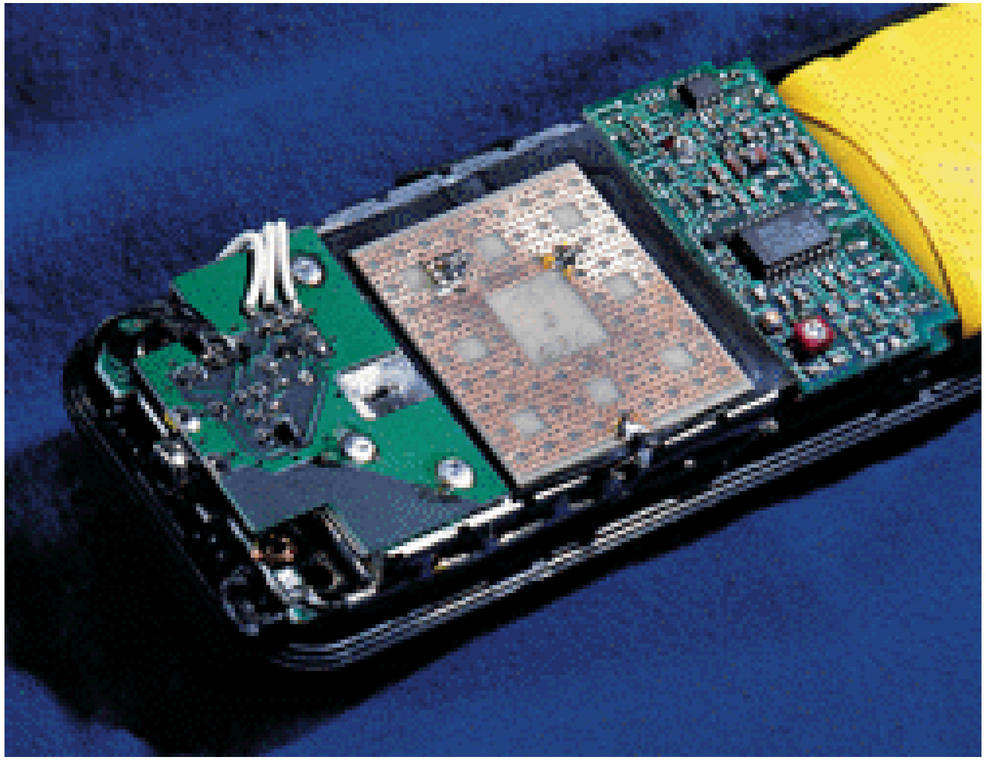
$$D_H = \ln 3 / \ln 2$$

非线性物理：分形物理

- Sierpinski地毯，映射到第n步，$\delta=(1/3)^n=3^{-n}$，而相应的面积单元数目$N=8^n$。所以，这个图形的维度为$D_H=\log 8/\log 3=1.8928$ 。

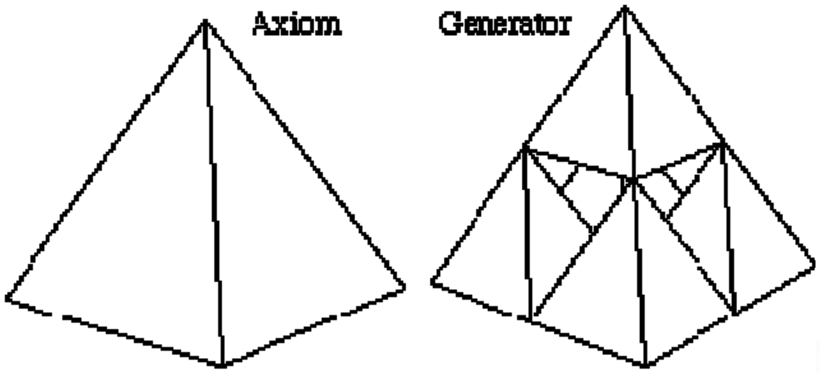


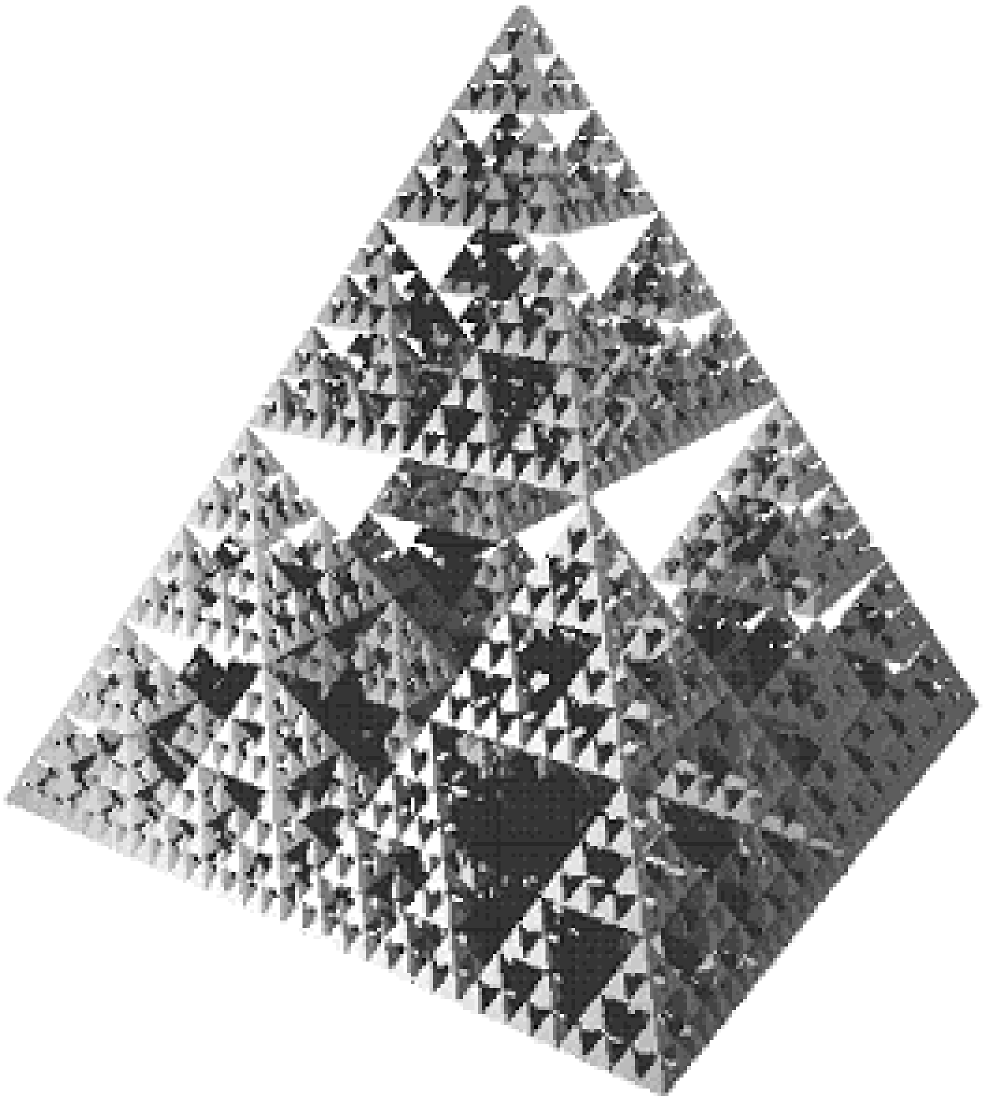
非线性物理：分形物理



天线发射

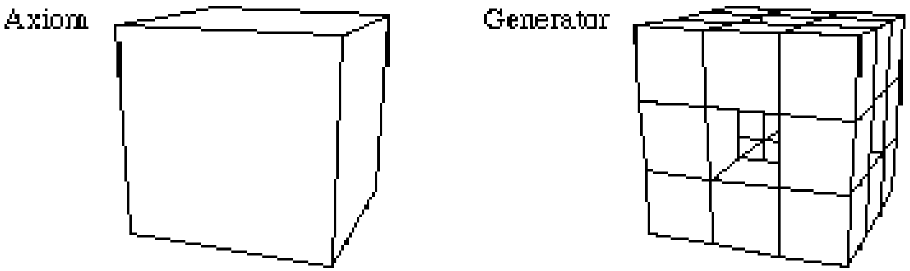
非线性物理：分形物理

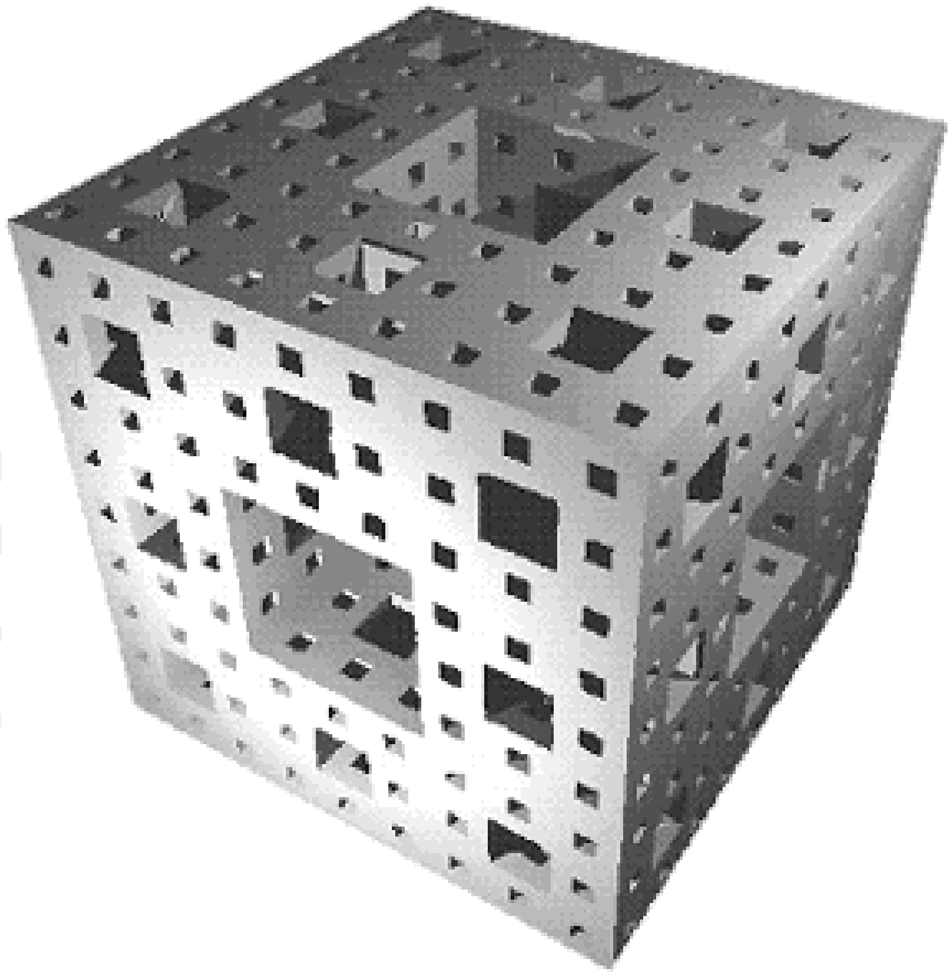




Sierpinski gasket:
D=log5/log2=2.3219

非线性物理：分形物理

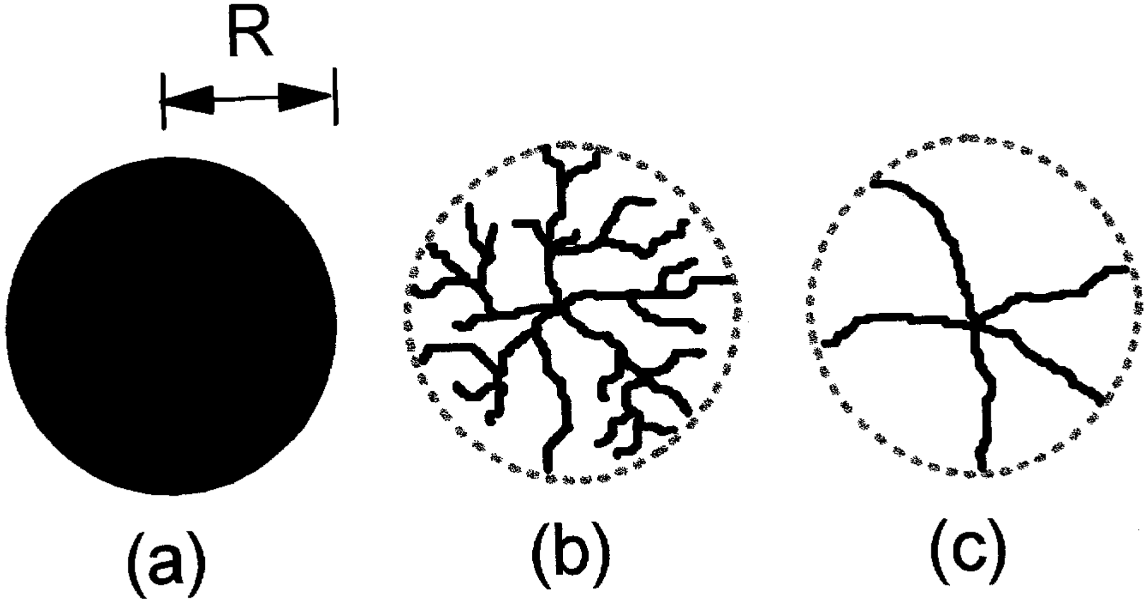




Sierpinski gasket:

D=log20/log3=2.7268

- 质心定义方法：



$M = \pi R^2$	$M = AR^D$	$M = NR^1$
$(D = 2)$	$(2 > D > 1)$	$(D = 1)$

- 对于分形体而言，物体在整个 ***d*** 维空间的占有概率为***P(δ)***，这里 $d\text{-}D_H$ 为余数维。

$$P(\delta) = \delta^{d-D_H}$$

- 经典力学问题：万有引力 ***f(r)*** 与物体间距 ***r*** 的关系：$f(r) \sim r^{-2}$，也没有特征尺度，但是维度为整数，是特例。

- 整理起来，有如下描述分形体的语言：

非线性物理：分形物理

分形基本结构特征

- 自相似性：局部放大或者缩小与整体相似。
- 空间幂指数律：整体量与线度呈幂指数关系。
- 标度不变性：不同标度下的相互一致性，即自相似。
- 没有特征尺度：结构没有特征尺度可以描述。

标度不变性的数学意义：

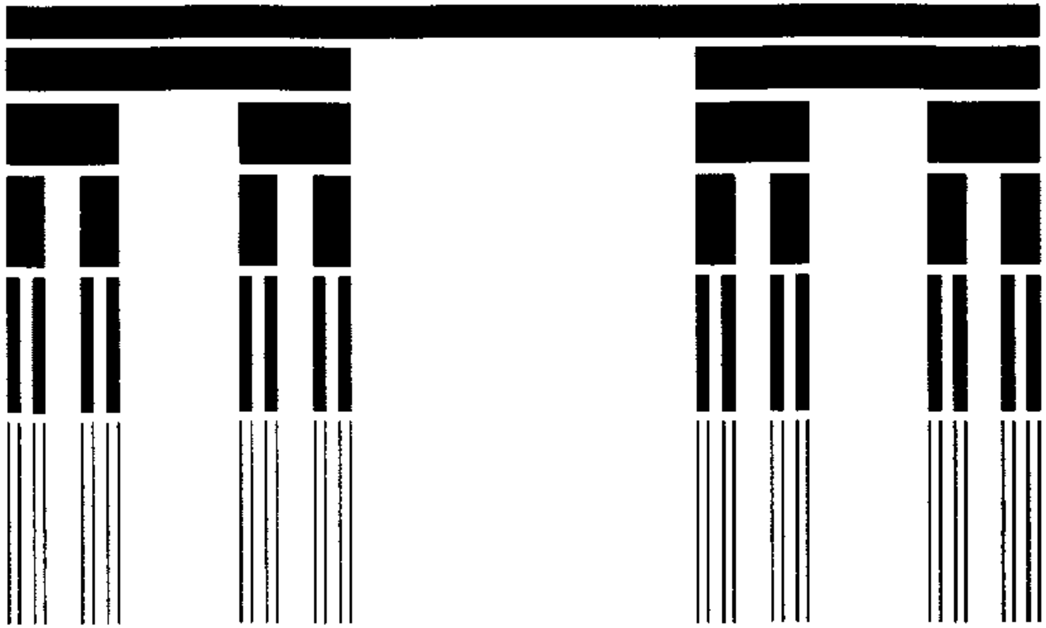
满足 $y(\lambda x)=\lambda^a y(x)$ 是齐次函数

设$x \to x'=\lambda x$时，$y'=Ax'^a=A\lambda^a x^a=\lambda^a A x^a=\lambda^a y$

所以$y' \sim y$

动力系统映射：

- 一个分形体的形成演化过程在物理上应该是某种动力系统的演化。阐明这种演化是非线性物理的主干。在本章会一直关注这个问题。以**Cantor**集合的动力系统映射为例。

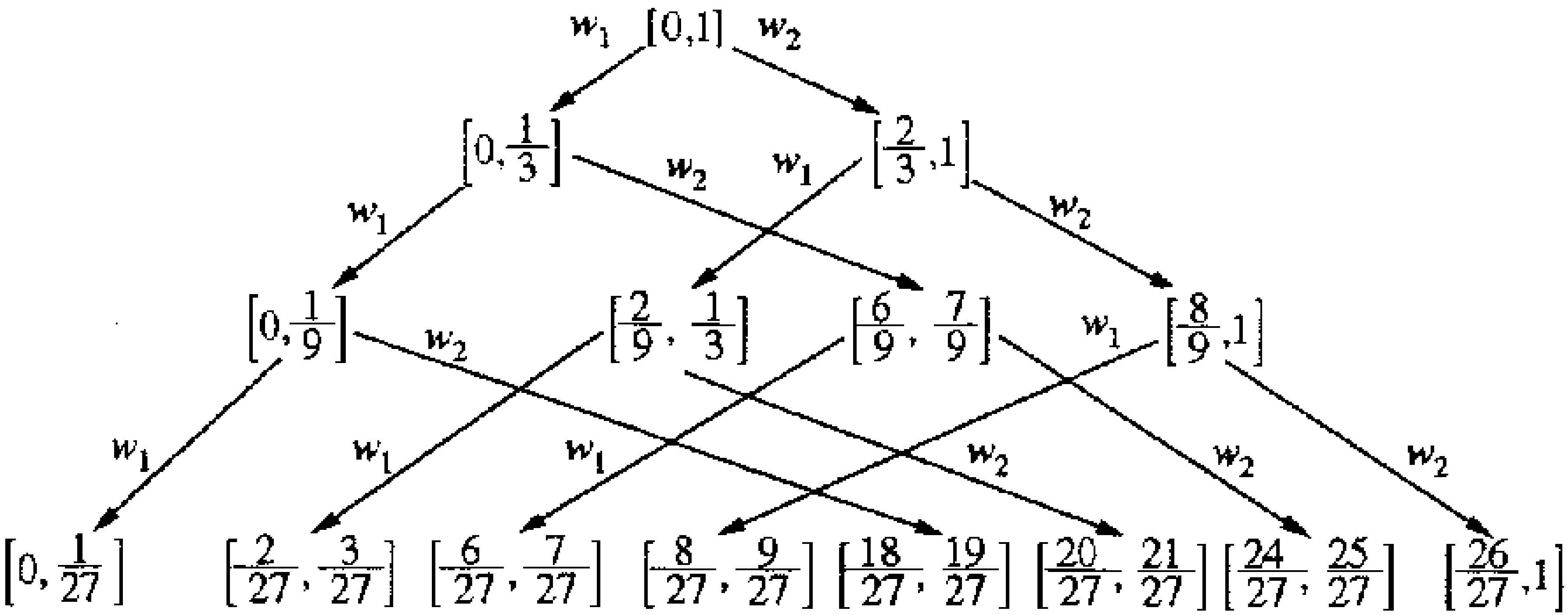


$$D = \frac{\lg N}{\lg\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\lg 2}{\lg\left(\frac{1}{1/3}\right)} = 0.6301$$

- 一般总可以将一个分形集合与一个动力系统映射联系起来。以**Cantor**集合为例：

$$
\begin{cases}
x_n \in [0,1] \\
x_{n+1} = \dfrac{1}{3} x_n = w_1(x_n) \\
x_{n+1} = \dfrac{1}{3} x_n + \dfrac{2}{3} = w_2(x_n)
\end{cases}
$$

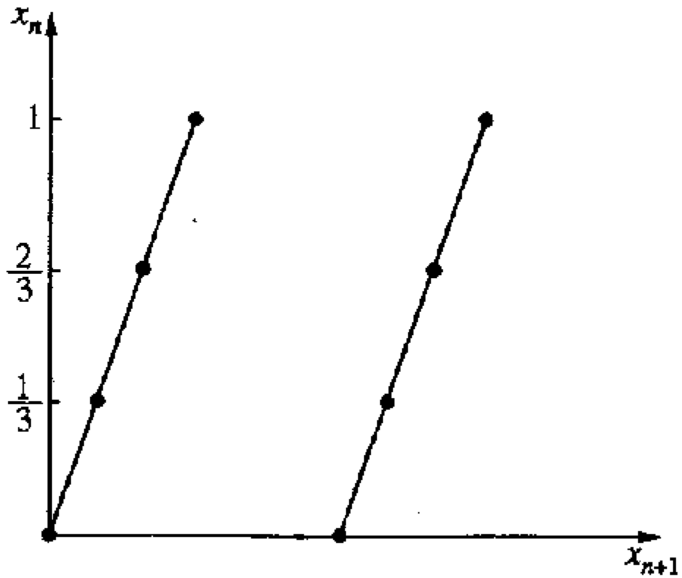
- 映射w_1将[0, 1]变成[0, 1/3]，w_2将[0, 1]变成[2/3, 1]；w_1又将[0, 1/3]和[2/3, 1]分别变成[0, 1/9]和[2/9, 1]，w_2将[0, 1/3]和[2/3, 1]分别变成[2/3, 5/9]和[8/9, 1]；构成如下的迭代过程：



- 这种映射过程反映了系统演化的奇异突变性，在空间形成按照分形自相似规律排列的奇异点。

- 一个分形集合可以与一个动力系统映射演化联系起来。

- 这种映射联系还可以图示如下：



$$x_n = 3x_{n+1} = w_1^{-1}(x_n),$$

$$x_n = 3x_{n+1} - 2 = w_2^{-1}(x_n).$$

- 更进一步，这种映射还可以考虑质量分布不均匀的情况，如：

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{4}x_n = w_1(x_n) \\ x_{n+1} &= \frac{2}{5}x_n + \frac{3}{5} = w_2(x_n) \end{aligned}\right\} \equiv f(x), \quad \begin{aligned} P_1 &= 0.6, \\ P_2 &= 0.4, \end{aligned}$$

非线性物理：分形物理

- 这一映射将[0, 1]分别拆解成[0, 1/4]和[3/5, 1]，依此类推。逆映射w_1^{-1}和w_2^{-1}又分别将[0, 1/4]和[3/5, 1]映射成[0, 1]。设初始质量密度为μ_0，有：

$$\mu_1\left[0,\frac{1}{4}\right]=P_1\mu_0\left(w_1^{-1}\left[0,\frac{1}{4}\right]\right)=P_1$$

$$\mu_1\left[\frac{3}{5},1\right]=P_2\mu_0\left(w_2^{-1}\left[\frac{3}{5},1\right]\right)=P_2$$

$$\mu_2(1)=P_1\mu_1\left[0,\frac{1}{4}\right]=P_1P_1=P_1^2,\quad \mu_2(2)=P_2\mu_1\left[0,\frac{1}{4}\right]=P_2P_1$$

$$\mu_2(3)=P_1\mu_1\left[\frac{3}{5},1\right]=P_1P_2,\quad \mu_2(4)=P_2\mu_1\left[\frac{3}{5},1\right]=P_2P_2=P_2^2$$

质量密度守恒！

非均匀分形：

- 分形体演化可以是均匀的，也可以是非均匀的。还是以Cantor集合为例：

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{3} x_n = w_1(x_n) \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3} x_n + \dfrac{2}{3} = w_2(x_n) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{4} x_n = w_1(x_n) \\ x_{n+1} &= \frac{2}{5} x_n + \frac{3}{5} = w_2(x_n) \end{aligned} \right\}$$

- 因为左右映射不对称，获得的长度不同，因此用同一尺度 r 去测量导致左右线段长度不同：左边长度为$N_1(r)$，右边长度为$N_2(r)$，则一次映射后总长数目：$N(r)=N_1(r)+N_2(r)$。
- 而左边短线段和右边大线段是自相似的，用 $r_1=r/4$ 测量左线段和用 $r_2=2r/5$ 测量右线段数目应该一样：$N_1(r_1 \cdot r)=N_2(r_2 \cdot r)=N(r)=r^{-D}$

$$N_1(r)=\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-D},\quad N_2(r)=\left(\frac{r}{r_2}\right)^{-D}$$

$$r_1^D+r_2^D=1$$

$$r_1^D+r_2^D+r_3^D+\ldots+r_n^D=1$$

- 例子(1) 非均匀Cantor集合，r_1=1/4，r_2=2/5，所以：

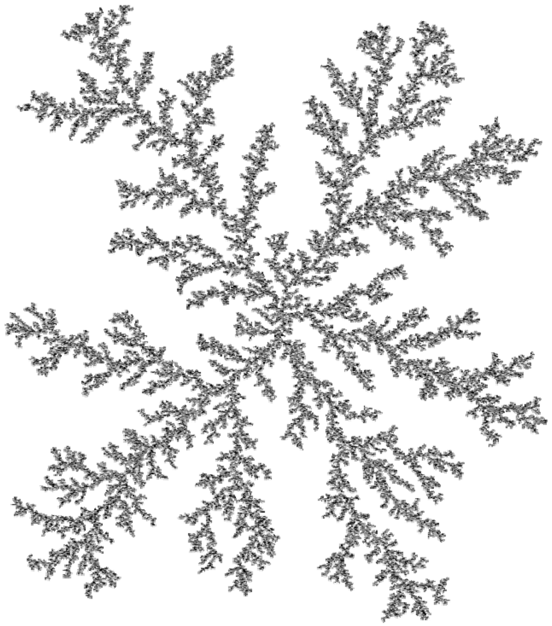
$$\left(\frac{1}{4}\right)^D+\left(\frac{2}{5}\right)^D=1\Rightarrow\left(\frac{1}{4}\right)^D=x,\ \left(\frac{2}{5}\right)^D=x^{0.66}\Rightarrow x=0.43,\ D=0.611$$

- 例子(2) Logistic映射： $g(x)=-\alpha g\left[g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right]$

- 取$g(0)$=1，则映射的周期倍分叉过程可转换成Cantor集合映射。设x=0，有$g(0)=-\alpha g[g(0)]=-\alpha g(1)$，所以$g(1)=-\alpha^{-1}$。要求得$g(-\alpha^{-1})$是多少？取$x$=1，得到$g(1)=-\alpha g[g(-\alpha^{-1})]=-\alpha^{-1}$，$g[g(-\alpha^{-1})]=\alpha^{-2}$。所以有$\alpha^{-D}+\alpha^{-2D}=1$，$D$=0.537。

无规分形：

- 自然界大量物理研究对象并非严格的数学分形，但其中某些物理量对空间尺度满足某种非整数的幂指数关系，统称分形。
- 检验分形的方法是检验其几个主要性质，例如标度不变性、幂指数行为等等。



计算空间对-对关联函数**c(r)**

$$c(r)=\frac{1}{V}\sum_{r'}\rho(r+r')\rho(r')$$

- 如果**c(r)**对任意一个长度变换不变，则满足所谓标度不变性：

$$c(br) \propto b^{\alpha} c(r), \quad 0 < \alpha < d$$

- 满足上述标度不变的函数是幂指数：

$$c(r) \propto r^{-\alpha}$$

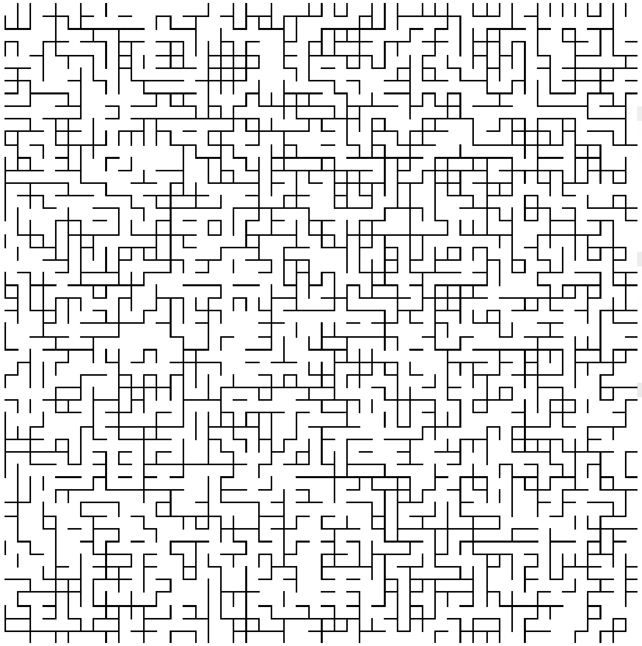
- 对一个分形体，半径为**L**的球内粒子数为**N(L)**：$d_f=d-\alpha$

$$N(L) \propto \int_0^L c(r) d^d r \propto L^{d-\alpha}$$

- 上式中注意到**c(r)**的定义中有**1/V**。这是定义无规分形的常用方法，非常**popular**。

无规分形之渗流集团:

- 统计物理的一个重要问题：格点渗流与键渗流。



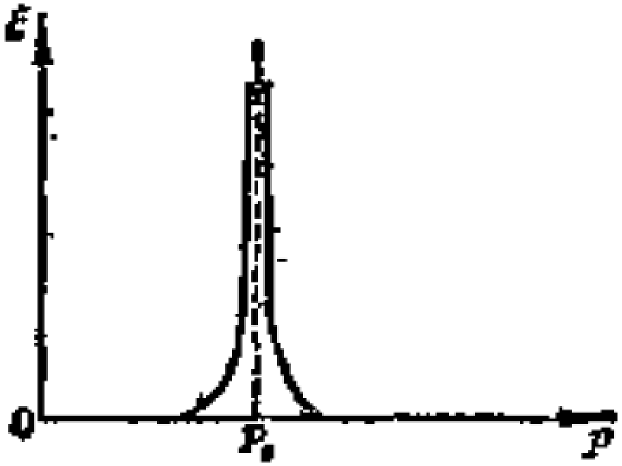
格点集团，概率**p**

集团的定义

$$P(p) \propto |p - p_0|^{\beta} \propto \varepsilon^{\beta}, \quad \varepsilon \equiv \frac{p - p_0}{p_0}$$

- 对渗流集团，应用关联函数，可得关联长度 ξ 及其临界指数 ν：

$$\xi \propto |p - p_0|^{-\nu} \propto \varepsilon^{-\nu}$$

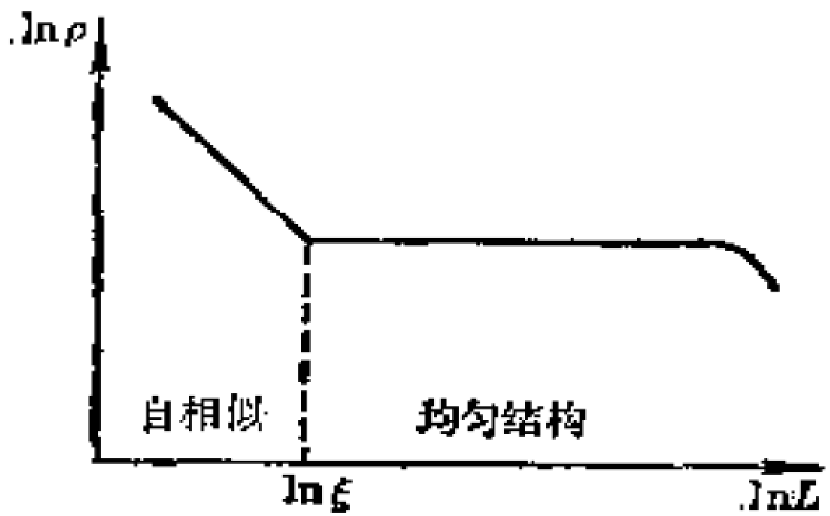


- 当 $\delta > \xi$，体系是密实的；当 $\delta < \xi$，体系是自相似的。当 $p=p_0$ 时，$\xi \to \infty$，整个体系为一个分形体。

- 证明这一点不难。定义格点密度 ρ 及格点体积 M：

$$\rho(L) \propto M(L)/L^{d} \qquad M(L) \sim L^{d_f}$$

$$\rho(L) \sim L^{d_f - d} \qquad \ln\rho(L) = const - (d - d_f)\ln L$$



- 因此，$L>\xi$，体系是密实的，有 $d_f=d$；当 $L<\xi$，体系自相似，有 $d_f<d$。如何计算 $L<\xi$ 下的分形维？

- 对于一个渗流分形集团($r<\xi$)，关联函数$c(r)$满足幂指数律：

$$c(r)\sim P(p)f(r/\xi)$$

$$\because P(p)\sim\varepsilon^{\beta},\quad \xi\sim\varepsilon^{-\nu},\quad \therefore P(p)\sim\xi^{-\beta/\nu}$$

$$c(r)\sim\xi^{-\beta/\nu}f(r/\xi)$$

- 注意，在 $L<\xi$ 时，$c(r)$ 与整个渗流集团关联长度 ξ 应该是没有关系的，所以幂指数函数$f(L/\xi)$下必须取下列形式：

$$f(r/\xi)\sim(r/\xi)^{-\beta/\nu}\qquad \therefore c(r)\sim r^{-\beta/\nu}$$

$$\because M(L)\sim\int_0^L c(r)d^d r=L^{d_f}=L^{d-\beta/\nu}$$

$$\therefore d_f=d-\beta/\nu\qquad \alpha=\beta/\nu$$

d=2时，β=0.104，ν=1.33，d_f~1.89，非常符合。

无规分形之随机行走(RW)：

- 对于理想布朗运动，运动轨迹也是分形。位移均方值为：

$$r^2 \equiv \langle r^2(t) \rangle \sim t, \quad N \sim r^{d_f}$$

- 因为**r**是位移均方根，所以一定有$N \sim r^2$，因此，d_f=2.0。

- 对自规避行走(SAW)，有类似分形行为。模拟和重整化给出SAW的关联临界指数v=3/4，d_f=1/v=4/3。

分维测量：实验

- 图像处理，散射实验。后者特别有用，因为散射与分形体结构因子相联系，而结构因子决定于空间相关函数 **c(r)**：

$$s(q)=4\pi\int_0^\infty c(r)r^2\frac{\sin(qr)}{qr}dr,\quad c(r)\sim r^{d_f-d}$$

- 对尺寸**R**有限的样品，**r>R**时，**c(r)**必定很快下降，所以对**d**=3：

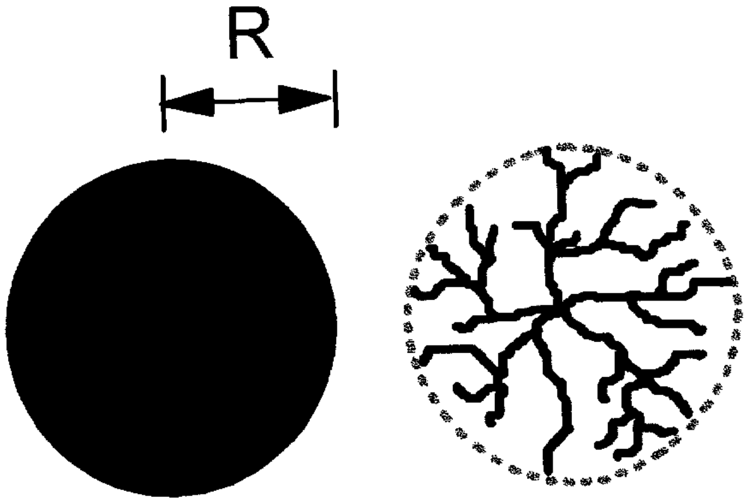
$$c(r)\sim r^{d_f-3}f(r/R),\quad \begin{cases} f(x)\sim const & as\ x<<1 \\ f(x)<<1 & as\ x>>1 \end{cases}$$

$$r=z/q\Rightarrow s(q)\sim q^{-d_f}\int_0^\infty z^{d_f-2}f(z/qR)\sin z dz$$

$$I(q)\sim s(q)\sim q^{-d_f}\quad as\quad R^{-1}<<q<<r_0^{-1}$$

分维测量：计算机模拟

- 最为popular，且简单，可使用回转半径法：



- 统计物理上经常使用实空间重整化方法来处理分形维问题，此处不再讨论。