标度对称性：分数维布朗运动

- 标度对称性是分形体重要的性质，它反映了分形结构的多尺度性和自相似性。通过一些熟悉的物理过程还可分析此标度对称性。

- 从随机布朗运动开始。分子平均位移方差和自相关系数：

$$\left\langle x^2(t)\right\rangle \propto t \qquad R(\tau)=\frac{<x(t)\cdot x(t+\tau)>}{<x^2(t)>}=e^{-\frac{\tau}{T}}$$

- ***R(τ)***是指数函数，***T***为特征时间。***R(τ)***的傅立叶变换就是布朗运动的功率谱 ***S(f)***：

$$S(f)=\int_0^{\infty}R(\tau)\cdot e^{if\tau}d\tau\propto f^{-2}$$

- $S(f)$属于噪声宽带谱，所以布朗运动也是褐色噪声。
- 如果有一噪声信号 $x(t)$，其傅立叶变换为 $\hat{x}(f)$ ，则：

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}(f)\cdot e^{ift}df$$

- 功率谱 $S(f)$就是其变换系数模的平方：

$$S(f)=\left|\hat{x}(f)\right|^{2}\propto f^{-\beta}$$

- 对布朗运动，指数 $\beta=2$。上式微分一次得：

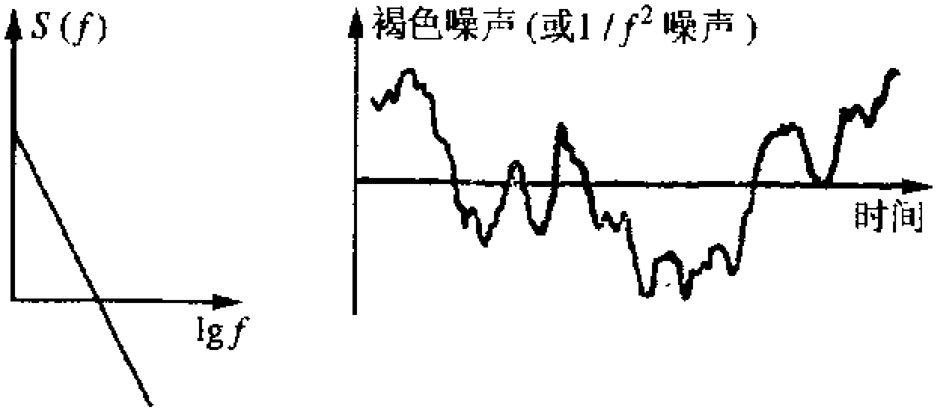
$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(if)\cdot\hat{x}(f)\cdot e^{ift}df$$

非线性物理：分形物理

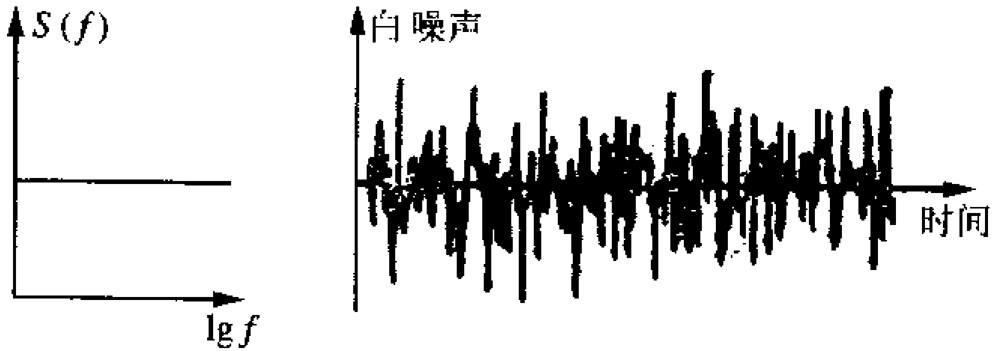
- 对应的功率谱 *S(f)*满足：

$$S(f)\Big|_{\frac{dx(t)}{dt}} = \left|if\hat{x}(f)\right|^2 \propto f^{-\beta+2} = f^{-(\beta-2)}$$

- 对另外一类布朗运动，*S(f)~f* ^{0}，即白噪声，它可以产生于布朗运动微分。一般噪声的功率谱指数 $\beta\in[0, 2]$。

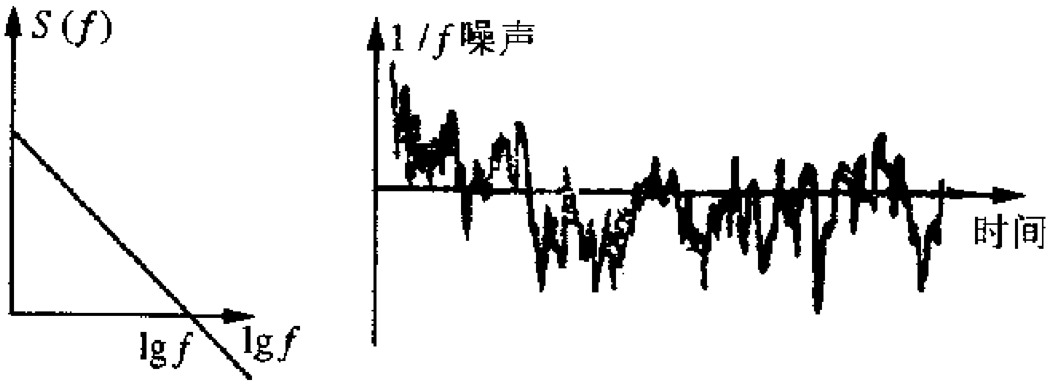


(c) 褐色噪声



(a) 白噪声

非线性物理：分形物理



(b) 1/f 噪声

- 如果我们将布朗运动普遍化，这就是分数维布朗运动：

$$< x^2(t) > \propto t^{2\alpha}$$

- 标度指数 **α=1/2**对应普通布朗运动。注意到量纲等价条件：

$$f \cdot S(f) = f \cdot f^{-\beta} = t^{2\alpha} = f^{-2\alpha} \qquad \beta = 2\alpha + 1$$

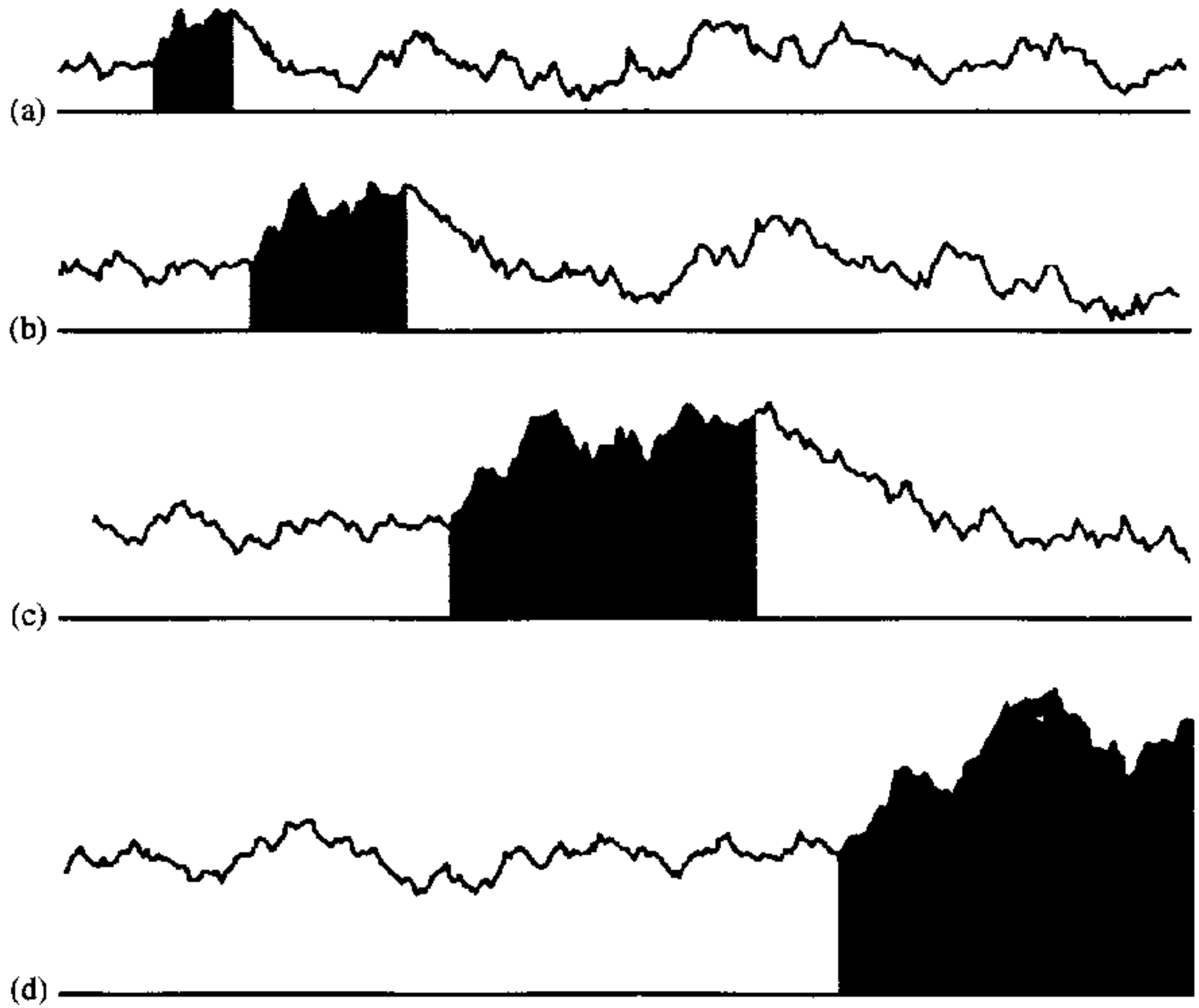
- 任意随机信号也可以表示为：

$$x(t) \propto t^{\alpha}$$

$$x(t) \xrightarrow{\text{in statistical sense}} \frac{x(\lambda t)}{\lambda^{\alpha}}$$

- 上式证明很简单，但是表示了将原有信号的自变量 t 改变 λ 倍，则对应的振幅也要改变 $\lambda^{-\alpha}$ 倍，则信号彼此在统计上没有差别。这就是标度不变性和自相似性。

非线性物理：分形物理



- 以普通布朗运动为例说明其分维：因为 $x(t)$ 和 $x(2t)/2^{\alpha}$ 自相似，对 $t\in[0,1]$区间，用尺度 r 去测量得到 N 个单元($N=1/r$)。
- 现在用尺度 $r/2$ 去测量$t\in[0,1/2]$区间内单元个数。因为指数标度的缘故， $t\in[0,1/2]$区间内单元数变成$t\in[0,1]$区间内单元数的$1/2^{\alpha}$倍，再用 $r/2$ 的尺度去测量，就会测得 $2N/2^{\alpha}$个单元。
- 对$t\in[1/2,1]$区间也是一样，总共在$t\in[0,1]$区间测得$2^{2-\alpha}N$个单元。
- 依此类推，用尺度 $r/2^k$ 测量，得到$(2^{2-\alpha})^k N$个单元，维数D是：

$$D = \lim_{k\to\infty} \frac{ln\left[\left(2^{2-\alpha}\right)^k N\right]}{ln\dfrac{2^k}{r}} = 2-\alpha \qquad \beta = 2\alpha + 1 = 2(2-D)+1 = 5-2D$$

标度对称性：物理学实例

- 临界现象中的标度不变性：

$$\xi \propto (T-T_c)^{-\gamma}$$

$$\xi[\lambda(T-T_c)] = \lambda^{-\gamma}(T-T_c)$$

- 湍流体系中，相距为 ***r*** 的两点速度差 ***Δv(r)*** 是随机信号，**Kolmogorov**证明：

$$\Delta v(r) \propto r^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\beta = 2\alpha + 1 \Longleftarrow \left\langle (\Delta v(r))^2 \right\rangle \propto r^{\frac{2}{3}}, \quad S(k) \propto k^{-\frac{5}{3}}$$

非线性物理：分形物理

- 对于湍流，标度不变性也是成立的：

$$\left\langle \left(\Delta v(\lambda r)\right)^2 \right\rangle \propto \lambda^{\frac{2}{3}} \left\langle \left(\Delta v(r)\right)^2 \right\rangle, \qquad S(\lambda k) \propto \lambda^{-\frac{5}{3}} S(k)$$

- 对于双变量体系，幂指数标度不变性也成立。以布朗运动为例，***x(t)***的概率分布满足：

$$p(x(t),t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma t}} exp\left(-\frac{x^2}{4\gamma t}\right)$$

- 作变换后得到：

$$x \rightarrow \lambda^{\frac{1}{2}} x, \quad t \rightarrow \lambda t \quad p(\lambda^{\frac{1}{2}} x, \lambda t) = \lambda^{\frac{1}{2}} p(x,t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda^{\frac{1}{2}}x, \lambda t)d(\lambda^{\frac{1}{2}}x) = 1$$

- 上式说明标度变换能够保持体系许多本征性质不变。
- 再一个双变量体系是铁磁相变。自由能 ***f*** 是温度 ***t*** 和外场 ***h*** 的函数，作如下变化可得到重整化标度不变性：

$$t \to \lambda^p t, \quad h \to \lambda^q h \quad f(\lambda^p t, \lambda^q h) = \lambda f(t,h)$$

$$f(t,h) = h^{\frac{1}{q}} F_1\left(\frac{t}{h^{\frac{q}{p}}}\right), \qquad f(t,h) = t^{\frac{1}{p}} F_2\left(\frac{h}{t^{\frac{q}{p}}}\right)$$

- 磁化强度**m**：物理上定义磁化强度**m**是 ***f*** 对 ***h*** 的导数：

$$m \propto \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_t \Rightarrow \lambda^q m(\lambda^p t, \lambda^q h) = \lambda m(t,h) \Rightarrow$$

$$m(\lambda^p t, \lambda^q h) = \lambda^{1-q} m(t,h)$$

- 在相变点附近：

$$\because m(t,0) \propto t^{\beta}, \quad m(0,h) \propto h^{\frac{1}{\delta}}$$

$$\therefore \beta = \frac{1-q}{p}, \quad \delta = \frac{q}{1-q}$$

- 还可以进一步得到磁化率和比热容：

$$\chi = \left(\frac{\partial m}{\partial h}\right)_t \propto \begin{cases} t^{-\gamma}, & t > 0 \\ t^{-\gamma'}, & t > 0 \end{cases}, \quad (h = 0)$$

$$c = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_h \propto \begin{cases} t^{-\alpha}, & t > 0 \\ t^{-\alpha'}, & t > 0 \end{cases}, \quad (h = 0)$$

- 变化指数等式关系得到：

$$\gamma = \gamma' = \frac{2q - 1}{p}, \quad \alpha = \alpha' = \frac{2p - 1}{p} \Rightarrow$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad \gamma = \beta(\delta - 1)$$

- 以上是二级相变中临界指数的普适关系。

非线性物理：分形物理

- 还可以讨论对流体系中的热传导和**Navier-Stokes**方程：

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+v\cdot\nabla v=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\gamma\Delta v$$

- ***T*** 温度, $\boldsymbol{\kappa}$热传导系数, ***v*** 速度向量, $\boldsymbol{\rho}$ 密度, ***p*** 压力, $\boldsymbol{\gamma}$粘性系数。

- 对热传导方程作变换得到：

$$x'=\lambda^{\frac{1}{2}}x,\quad t'=\lambda t,$$

$$T'=\lambda^{-\frac{1}{2}}T\Rightarrow T(\lambda^{\frac{1}{2}}x,\lambda t)=\lambda^{-\frac{1}{2}}T(x,t)$$

- 热传导方程的标度不变性因此得证。

- 讨论Navier-Stokes方程，作标度变换：

$$x' = \lambda x,\quad t' = \lambda^{1-\alpha} t,\quad v' = \lambda^{\alpha} v,$$

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)' = \lambda^{2\alpha}\left(\frac{p}{\rho}\right),\quad \gamma' = \lambda^{\alpha+1}\gamma$$

- 得到时空尺度变换后的标度关系：

$$v(\lambda x, \lambda^{1-\alpha} t) = \lambda^{\alpha} v(x,t)$$

- 速度场满足标度不变性，典型的分形特征。类似，对于湍流能量耗散率(分形)有：

$$\varepsilon \propto \frac{v^3}{x} \Rightarrow \varepsilon' \propto \frac{\lambda^{3\alpha}}{\lambda}\varepsilon = \lambda^{3\alpha-1}\varepsilon$$

随机过程：

- 除了分数维布朗运动之外，还有很多随机行为也是分形体。讨论一下正方晶格中的随机行走过程(**random walk**)。经过 n 步随机行走后，粒子净位移为：

$$r(n)=\sum_{i=1}^{n} e_i \Rightarrow \langle r(n)\rangle = 0$$

- e_i是第i步指向最近邻的单位向量。因为$\langle e_i\rangle=0$，所以$\langle r(n)\rangle=0$。

$$\because e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

$$<r^2(n)>=\left\langle\left(\sum_{i=1}^{n}e_i\right)^2\right\rangle=n+2\sum_{i>j}^{n}<e_i\cdot e_j>=n$$

- 如果行走一步时间为***τ***，***n*** 步行走时间 ***t=nτ***，所以有均方位移：

$$<r^2(n)>=t/\tau$$

- 对于格子间距为 ***a***、可能的行走方向为 **2*d***，则单位时间行走方差定义为扩散系数 ***K***：

$$K=\frac{a^2}{(2d)\tau}\Rightarrow\sigma^2=<r^2(n)>=\frac{(2d)K}{a^2}t$$

- 这就是布朗运动。对于***d*=1**时推导行走位移的概率密度 ***P*(*r*, *t*)**。

- 首先，<**$x^2(t)$**>满足：

$$< x^2(t) >= \int x^2 P(x,t)dx$$

- 如果 **n** 次行走有 **m** 次向右，**(n-m)** 次向左，则位移 **x** 表示为：

$$x = m-(n-m) = 2m-n$$

- 概率密度应该满足二项式分布，且 ***P*=1/2**：

$$m = (x+n)/2, \quad (n-m) = (n-x)/2$$

$$P(m,n) = \binom{n}{m} P^m (1-P)^{n-m}$$

$$P(m,n) = \frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$$

- 注意到： $$n! \sim (2\pi n)^{1/2}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$$

$$P(m,n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\left(\frac{n}{2m}\right)^{m}\left(\frac{n}{2(n-m)}\right)^{n-m}$$

- 对上式右边两项：

$$ln\left[\left(\frac{n}{2m}\right)^{m}\left(\frac{n}{2(n-m)}\right)^{n-m}\right]$$

$$=-m\,ln(2m/n)-(n-m)ln[2(n-m)/n]$$

$$= -(x+n)\ln[(x+n)/n]/2$$

$$-(n-x)\ln[(n-x)/n]/2$$

$$= -(x+n)/2\cdot\left[\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\dots\right]$$

$$-(n-x)/2\cdot\left[-\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2-\dots\right]$$

$$\approx -\frac{x^2}{2n} \Rightarrow \left(\frac{n}{2m}\right)^m\left(\frac{n}{2(n-m)}\right)^{n-m} \approx e^{-\frac{x^2}{2n}}$$

- 另外：

$$\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}=\sqrt{\frac{n}{(n+x)(n-x)/4}}=\sqrt{\frac{4n}{n^2-x^2}}\approx\sqrt{\frac{4}{n}}$$

- 所以：

$$P(m,n)=\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{x^2}{2n}}\Rightarrow P(m,t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

- 从归一化角度，上式应该是：

$$P(m,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

$$\because \tau = 1/2K, \quad K = 1/2, \quad \sigma^2 = t$$

$$\therefore P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

- 上式是等步长随机行走扩散过程的概率分布，可以推广到高维。
- 但是，实际系统的随机扩散并非一定是等步长的，多尺度随机行走轨迹比比皆是。这样的多尺度行走就是典型的分形过程。
- 可以看到，这种分形随机行走将导致异常扩散行为。

长程相关与异常扩散：

- 对于分形随机行走，通常定义指数关系：

$$t \propto r^{D_w} \Rightarrow \langle r^2(t) \rangle \propto t^{2/D_w}$$

- D_w就是随机行走分形维，$D_w=2$对应于布朗运动，$D_w \neq 2$对应于异常扩散，如湍流：$\langle r^2 \rangle \sim t^3 \rightarrow D_w=3/2$。

- 异常扩散的物理在于长程指数相关性：

$$\langle e_i \cdot e_j \rangle \propto \frac{A}{|i-j|^{\gamma}} \qquad e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

- 这种指数相关使得多尺度行走成为必然：

$$< r^2(n) >= \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \right)^2 \right\rangle = n + 2\sum_{i>j}^{n} < e_i \cdot e_j > = n + Bn^{2-\gamma}$$

- 当 γ <1时，上式第二项占优势，所以有：

$$< r^2(n) > \propto n^{2-\gamma} \Rightarrow \alpha = 1/D_w = \frac{2-\gamma}{2} \quad (\gamma < 1)$$

- 可以看到，行走的长程相关导致了扩散的异常，标度指数 α 比布朗运动的1/2大，功率谱指数 β 也大于布朗运动的 β=2：

$$\beta = 2\alpha + 1 = 3 - \gamma$$

小结：

- 自然界的随机行走过程都是具有多尺度的，其行走轨迹某种意义上都是分形结构，满足标度不变性和具有分数指数维特征。
- 描述随机行走过程的微分方程都可以扩展到分形过程。