生长问题：

- 自然界有很多物质形态，象**Gold Black**，**coagulated aerosols**等等都是颗粒聚集呈现非常纤细的形态。
- 这些聚集体的空间相关函数与尺度都呈幂指数关系，其形成过程具有强烈的动力学特征。
- 与此类似的平衡结构有**Eden growth model**生长模型，**random animals**随机动物，**self-avoiding walk**自规避行走和**percolating clusters**渗流集团。
- 前者是动力学结构，后者是平衡结构。

DLA模型：

- **DLA**模型是**Eden**模型的另一个变种，其主要差别是加进了动力学效应：颗粒不是随机加在已存在颗粒周围，而是通过从远处随机扩散来实现**sticking**，进而生长。

- 具有随机扩散的动力学会变得十分不同！扩散拉普拉斯方程！

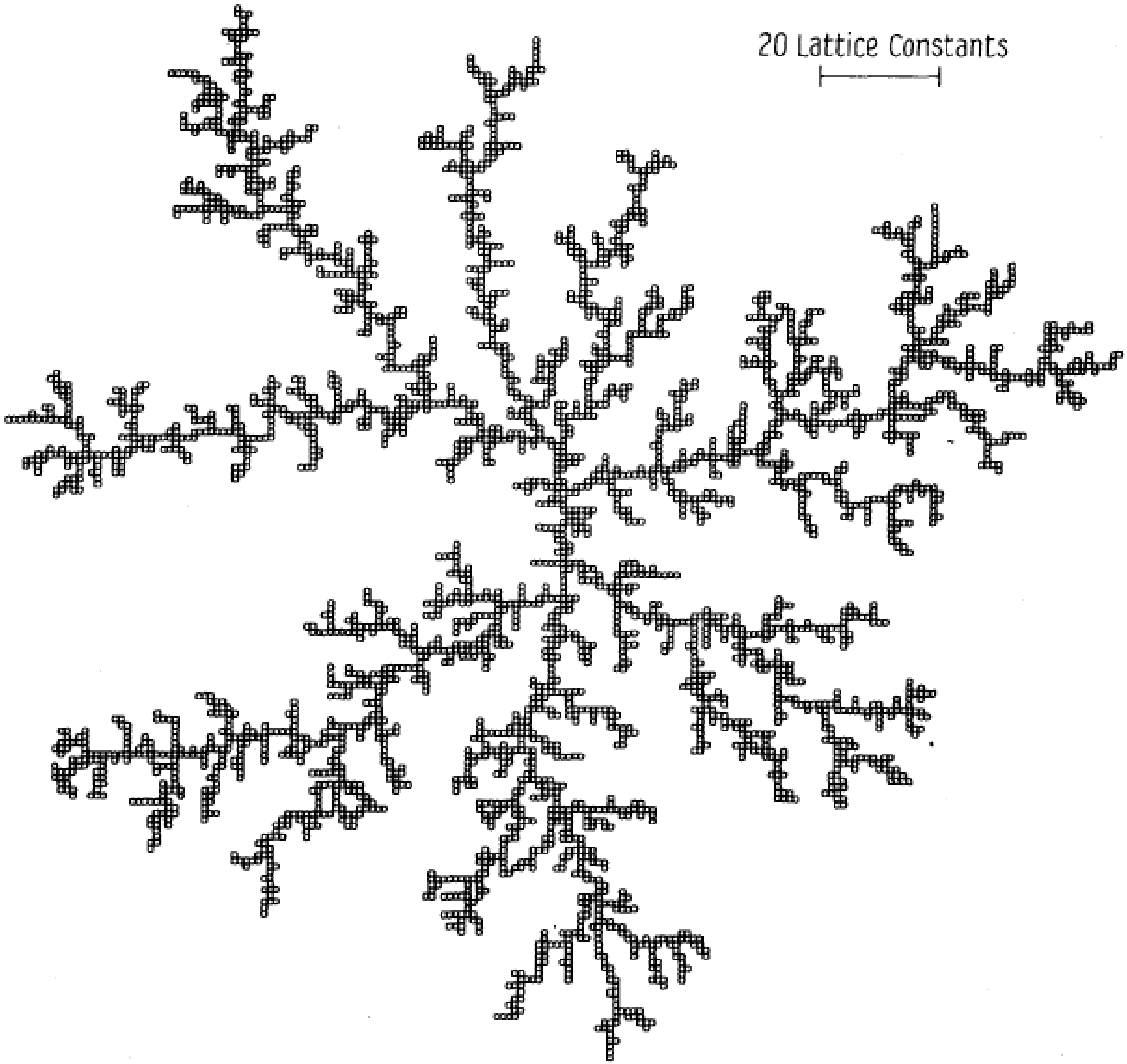
- **(1)** 加入了动力学行为后形成的结构有什么特征？

- **(2)** 宏观描述背后的微观机理是什么？

- **(3)** 如何与非线性动力学联系起来？

- **DLA**模型基本步骤如下**:**
- **(1)**点阵原点存在一个颗粒；
- **(2)**第二个粒子从远处某个随机位置发出，空间进行随机行走，直到碰上一个已存在的颗粒，则此颗粒固定下来。
- **(3)**重复过程**(1)**和**(2)**。
- **(4)**如果颗粒碰上边界，此颗粒被舍弃。
- 这种生长一个突出的特点是越是向外伸展的聚集体枝叉生长得越快，即所谓“**shadowed**”效应，因此聚集体比**Eden**模型要开放。

非线性物理：分形物理



- 相关性分析：上图是一个典型的正方点阵模拟的DLA cluster，在三角点阵或者无规点阵里面一样。

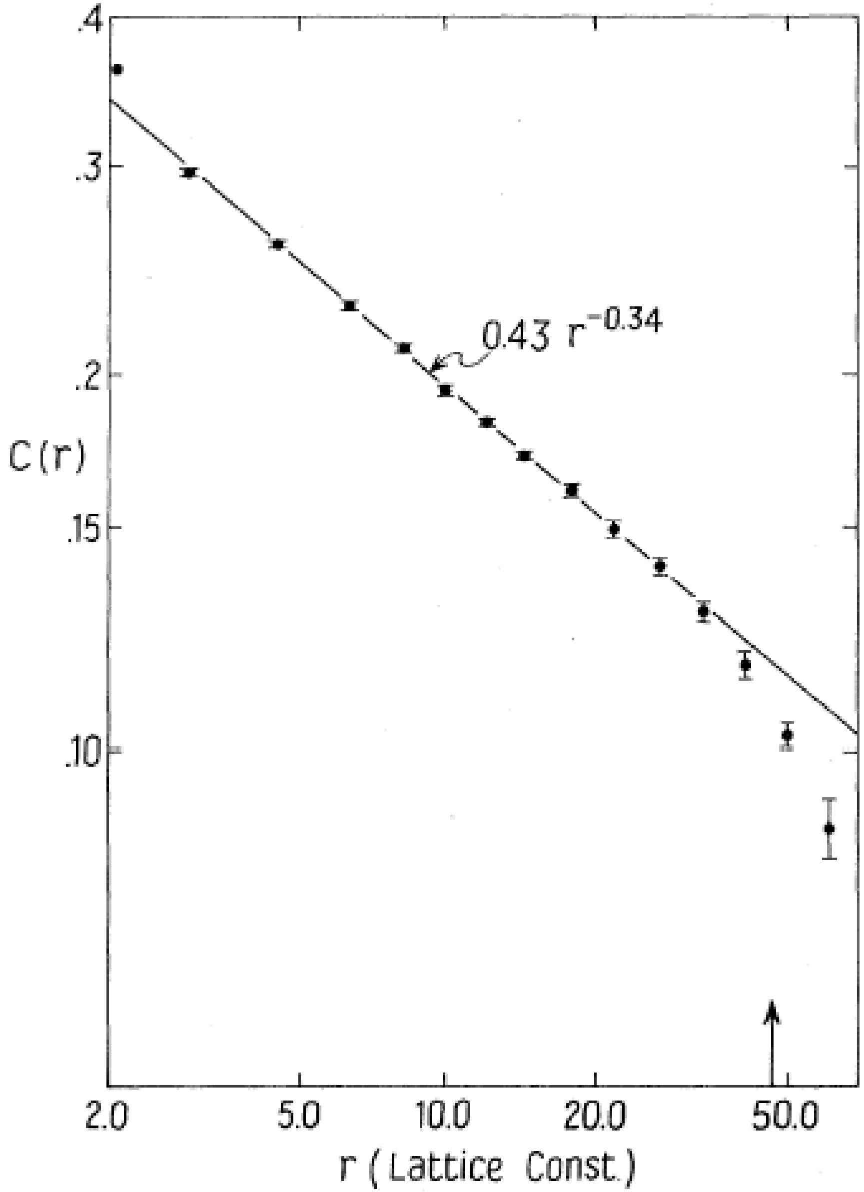
- 结构分析手段之一是空间相关函数。聚集体密度的定义是：

$$\begin{cases} \rho(\vec{r}\,)=1 \; if \;\; occupied \\ \rho(\vec{r})=0 \; if \;\; not \; yet \end{cases}$$

- 一个含N个颗粒的聚集体相关函数定义如下，这个定义只是对系综平均相关函数的近似表达

$$C(r) \equiv N^{-1} \sum_{r'} \rho(r')\rho(r'+r), \qquad \langle \rho(\vec{\mathbf{r}}')\rho(\vec{\mathbf{r}}'+\vec{\mathbf{r}})\rangle / \langle \rho(\vec{\mathbf{r}}')\rangle$$

- 只要*r*远小于聚集体尺度，上述相关函数应该只与距离*r*相关。
- 对上图DLA聚集体的分析计算得到相关函数如右图所示，数据是对六个3000颗粒的aggregates沿各个方向统计平均的结果。



非线性物理：分形物理

- 重要的是幂指数相关性。
- 对三角点阵有类似的幂指数结果。
- 其它结果总结在表 *I* 中。

$$C(r) \sim r^{-0.343 \pm 0.004}.$$

TABLE I. Values of the correlation exponent A for diffusion-limited aggregation model and other systems.

	A Two dimensions	Three dimensions
Diffusion-limited aggregation:		
Square lattice, average of six clusters of 2079–3609 particles in size (Fig. 2).	0.343 ± 0.004[a]	
Triangular lattice, average of three clusters of 1500–2997 particles.	0.327 ± 0.01[a]	
Radius of gyration, weighted average of A values inferred for six clusters of 999–3000 particles, Eq. (5).	0.299 ± 0.02[a]	
Koch curve with $A = 2D = 0.416$, measured average correlation function of seven curves, translated and rotated at random.	0.42	
Metal-particle aggregates, correlations of particle density from micrographs, Ref. 3.	0.32 ± 0.01[b]	1.32 ± 0.01[c]
Self-avoiding walk (flight), correlations of step density, Ref. 6.	0.667	1.33
Percolation, from radius of gyration of clusters at threshold, Eq. (5), Refs. 5 and 7.	~0.2	0.9
Random animals from radius of gyration, Eq. (5), Ref. 5.	0.46	1.18

非线性物理：分形物理

- 分形分析：**DLA**所给予我们直观的分形特征指导我们进行分形分析。先从数学上和**Koch**结构开始。
- 利用上面的空间相关函数方法进行分析得出幂指数为**-0.42**，而**Koch**结构的分形维严格上是***D=ln3/ln2*=1.585=2.0-0.42**。
- 在 **Hausdorff** 集合中密度相关具有如下形式：

$$\langle \rho(\vec{r}')\rho(\vec{r}'+\vec{r})\rangle \sim r^{D-d} \equiv r^{-A}.$$

- 可以理解，一个开放的体系空间相关性总是随着距离而衰减的。我们来看看如何推出这一关系。

- 所谓 **Hausdorff** 集是指这样一个空间，它可以被半径为 ***a*** 的物体填充，但拓扑学上看并没有填满。而半径为 ***a*** 的物体个数 ***K(a)*** 按照 a^{-D} 变化。这是我们前面讲分形维定义时已经讲到。

- 这样空间体积为 $V=\Sigma K(a)a^{d}\sim\Sigma a^{d-D}$。而每一个物体的平均体积 $N(a)\sim 1/K(a)\sim a^{D}$。按照空间相关函数的定义，我们有：

$$a^{D}\sim N(a)=\int_0^a d^d r\langle\rho(\vec{\mathrm{r}})\rangle_{\text{origin occupied}}$$

$$=\int_0^a d^d r\langle\rho(\vec{\mathrm{r}})\rho(0)\rangle/\langle\rho(0)\rangle,$$

$$\langle\rho(\vec{\mathrm{r}}')\rho(\vec{\mathrm{r}}'+\vec{\mathrm{r}})\rangle\sim r^{D-d}\equiv r^{-A}.$$

- 这里*d*是空间维数。可以看出，要满足上式，相关函数必须是第二行的形式，因为将相关函数表达式代入上式就得到$N(a)\sim a^D$。
- 记住：不要管系数的变化，只管幂指数的变化。
- 在*r*很大或者很小时，相关函数对幂指数律的偏离是因为存在一个下限尺度和上限尺度。
- 当然，更为直接的是颗粒数目*N*对聚集体回转尺寸*R*的幂指数律关系：

$$N(a)\sim a^D \text{ for } a\lesssim R, \qquad N\sim R^D=R^{d-A}.$$

- 相关函数对尺度的幂指数关系说明了**DLA**聚集体具有标度不变性，这与平衡统计力学中的自回避行走，渗流集团和相变过程的临界现象相似。
- 但是一个很大的不同是**DLA**模型的标度不变性是因为不可逆的动力学生长过程，而上述那些行为则是源自平衡态系综。

非线性物理：分形物理

- 微观输运过程分析—为什么是非线性问题?
- 从输运动力学角度分析，**DLA**模型与枝晶生长模型可以类比。既然加入了扩散动力学，那么可以从微观扩散角度分析问题。
- 根据扩散定律，我们总是可以将生长速率表示为与局域输运通量成正比。

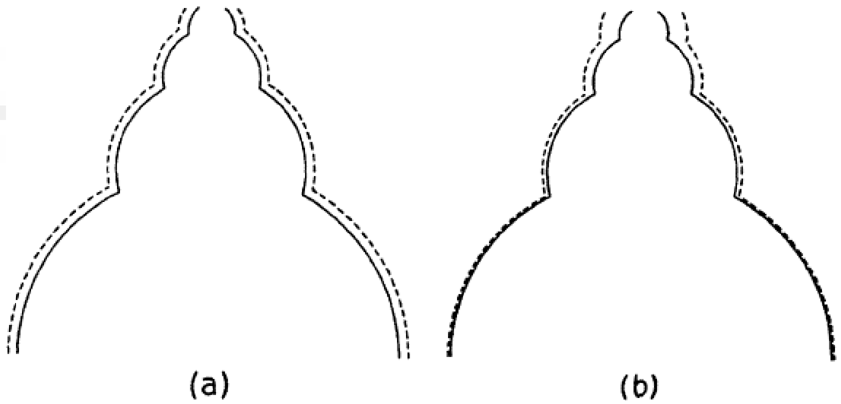
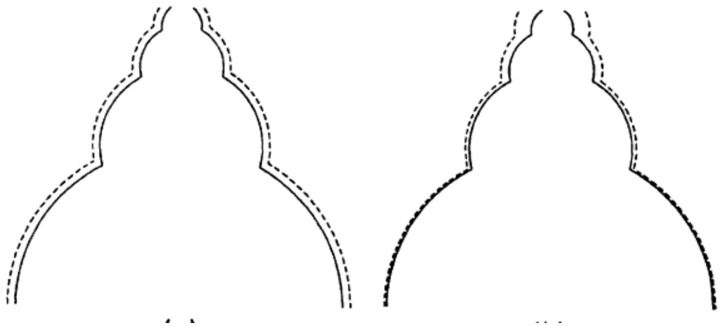


FIG. 2. Growth of a tower of spheres according to (a) the Eden model and (b) DLA.

- 聚集体周边某一位置 **r** 在随机行走的第 **n** 步俘获一个颗粒的概率应该与此处此时的浓度梯度 **u(r,n)** 成正比，而 **u(r,n)** 应该与第 **n**步访问过位置 **r** 的随机行走数目成比例，虽然在这个第 **n** 步以前此位置仍然不是聚集体周边位置，因为聚集体一直在生长。

- 假定这个数目是 $Z_n(r)$，那么应该有：

$$Z_{n+1}(\vec{r}) = \sum_{\alpha=1}^{c} Z_n(\vec{r}+\vec{\alpha}),$$



- 这里 α 是对 c 个最近临位置求和。浓度梯度 $u(r,n)=Z_n(r)/c_n$。由此可以得出如下微观方程：

$$u(\vec{\mathbf{r}}, n+1) - u(\vec{\mathbf{r}}, n)$$

$$= c^{-1} \sum_{\alpha=1}^{c} [u((\vec{\mathbf{r}} + \vec{\alpha}), n) - u(\vec{\mathbf{r}}, n)],$$

- 在聚集体边界处有**u=0**，所以在边界处**u**也就是浓度，所以上式左边：

$$u(\vec{r}, n+1) - u(\vec{r}, n) = \frac{\partial C(\vec{r}, n+1)}{\partial x} - \frac{\partial C(\vec{r}, n)}{\partial x}$$

$$\because \textit{at growing surface}: \partial x = 1, \partial C = C - 0 = C$$

$$\therefore u(\vec{r}, n+1) - u(\vec{r}, n) = \frac{\partial C(\vec{r})}{\partial t}$$

- 而右边则是标准的**Laplace**算符**(Laplacian operator)**。所以上式正是含时的**Laplace**方程。

$$\sum_{\alpha=1}^{c}\left[u((\vec{r}+\vec{\alpha}),n)-u(\vec{r},n)\right]=\sum_{\alpha=1}^{c}\left[\frac{\partial C((\vec{r}+\vec{\alpha}),n)}{\partial r}-\frac{\partial C(\vec{r},n)}{\partial r}\right]$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{c}\left[\frac{\partial^2 C((\vec{r}),n)}{\partial r^2}\right]=\nabla^2 C(r,t)$$

- **DLA**的微观过程不过就是满足含时**Laplace**方程随机扩散而已。
- 事实上，**DLA**过程的核心是在随机扩散而不是在沉积机理上，因为沉积过程中粘附几率**=1.0**，没什么更多物理。

本章节作业：

- 模拟一个N>3000的MDLA，利用下面的哈密顿：

$$\beta E = -\frac{\beta J}{2}\sum_{\langle i,j\rangle}\sigma_i\sigma_j - \beta H\sum_i \sigma_i,$$

- 利用相关函数和质量回转法求取分形维！
- 研究其临界相变行为与二维体系有何不同？
- 如果J是随机场，研究其分形行为和临界相变行为！(选作)
- 分析MDLA与 βJ、随机场强度的依赖关系。