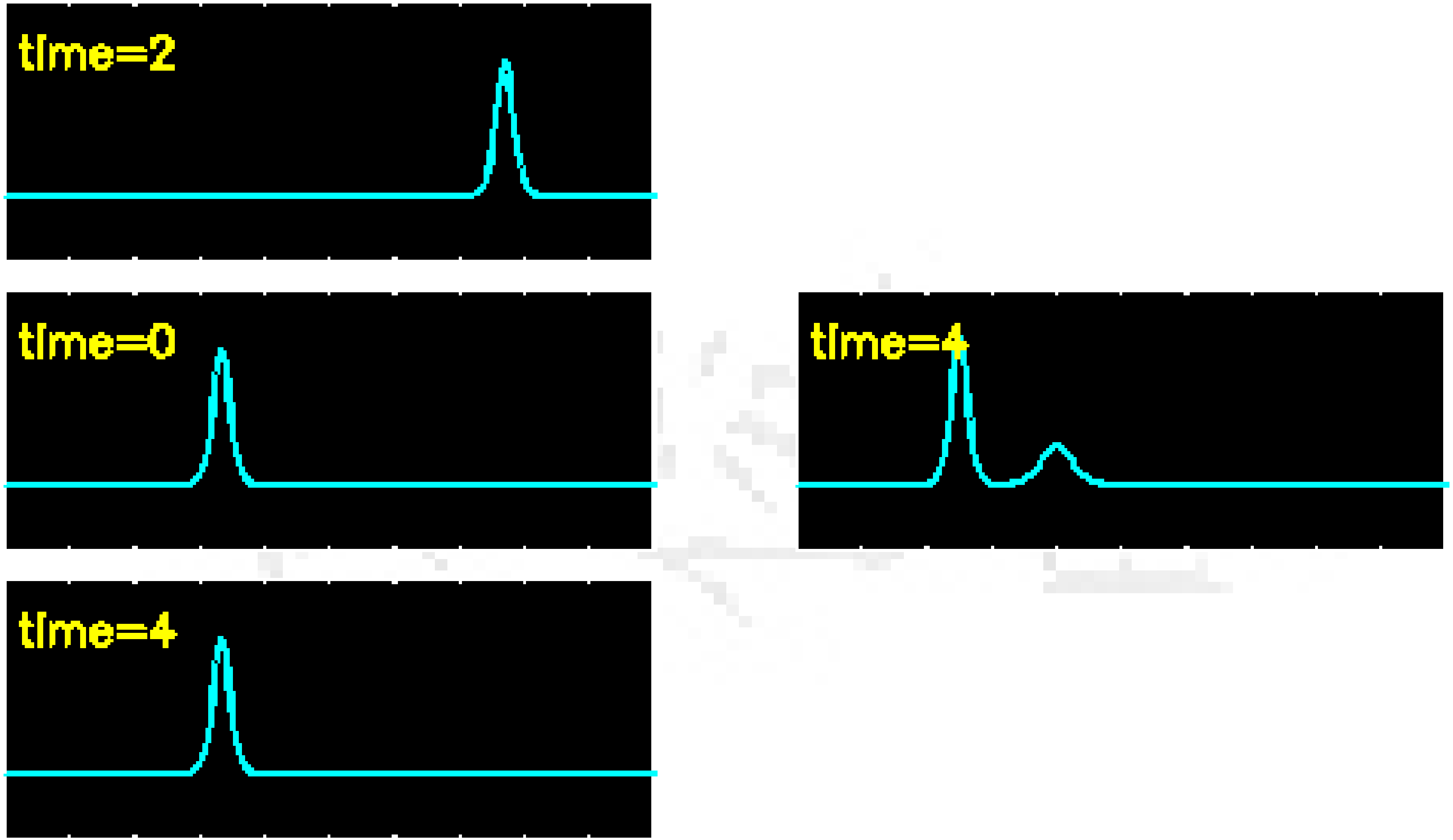
物理学中的孤子：

- 孤波是物理世界中混沌的对立面，驱动与耗散竞争产生混沌，也可以产生孤波。
- 已经有相当数量的非线性微分方程存在孤子解。与此同时，也在若干物理现象中发现了孤波行为。
- **F. Calogero**和**A. Degasperis**在**“Spectral Transform and Solitons” (1982)**一书中给出了四十多个具有孤波严格解的微分方程。
- 此处列出几个物理中的孤波效应。

非线性物理：孤波物理



- **(1) KdV**方程：描述弱非线性与弱色散现象，如浅水波、固体中热脉冲、纵向弹性色散波的传播、等离子体的离子-声波等等：

$$u_t \pm 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

- **(2)** 非线性薛定谔**NLS**方程：描述弱非线性与强色散现象，如单模光纤中的光孤子、一维海森堡磁体、电介质中强激光的自聚焦、流体力学中的涡旋：

$$iu_t + u_{xx} \pm 2|u|^2 u = 0$$

- (3) sine-Gordon (SG)方程：描述如电荷密度波、自旋密度波、约瑟夫逊结中的磁通量子、超离子导体、位错传播、铁磁体Bloch畴壁、自旋传播等现象：

$$u_{\xi\tau} \pm \sin u = 0, \quad u \equiv u(\xi, \tau)$$

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \quad u \equiv u(x,t)$$

- (4) φ^4 方程：描述一维晶体的位移相变，是场论模型方程，因为哈密顿 K 含有 φ^4 而得名。

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} - \varphi + \varphi^3 = 0$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\varphi_t^2 + \varphi_x^2\right) - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{4}\varphi^4$$

- **(5) Double sine-Gordon (DSG)方程：描述^{3}He中的B相，原子共振跃迁等等现象：**

$$u_{xt} \pm \left[\sin u + \eta \sin \frac{u}{2} \right] = 0$$

- **上述(3)~(5)同属于Klein-Gordon方程的特例，它可以表示为下述一般形式：**

$$u_{tt} - u_{xx} = F(u)$$

- ***F(u)=±sin(u)*时为SG方程，*F(u)=*$\varphi-\varphi^3$时为φ^4方程，*F(u)=±[sin(u)+*η*sin(u/2)]*时为DSG方程。**

孤子的基本性质：

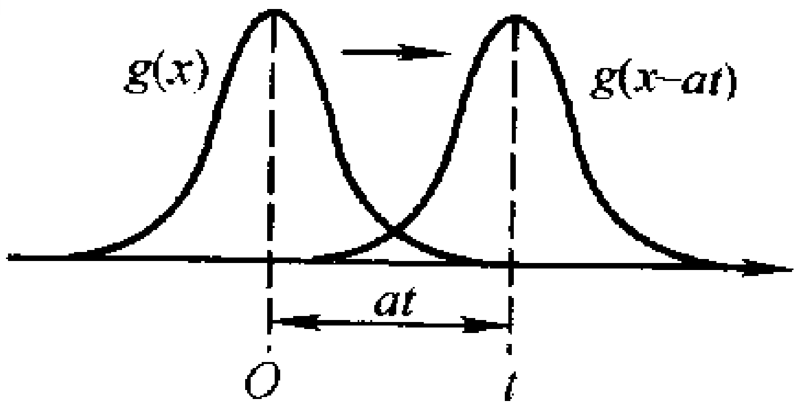
- 大致分析一下形成孤子的物理条件。先看微分方程：

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad |x| < \infty, \ t > 0$$

- 这是通常的弦振动方程，线性无色散，**u**为任意函数，通解为：

$$u = f(x + at) + g(x - at)$$

- ***g(x-at)***表示***t*=0**时波形***g(x)***的波在***t***时刻向右平移***at***距离，即右行波；而***f(x+at)***表示左行波。



非线性物理：孤波物理

- 这一方程没有什么实际物理，相比较看微分方程：

$$u_t + u_{xxx} = 0$$

- 也是线性方程，但是包含色散项u_{xxx}，其通解为：

$$u_k(x,t) = exp[i(kx - \omega t)]$$

$$u(x,t) = \sum_k C_k exp[i(kx - \omega t)]$$

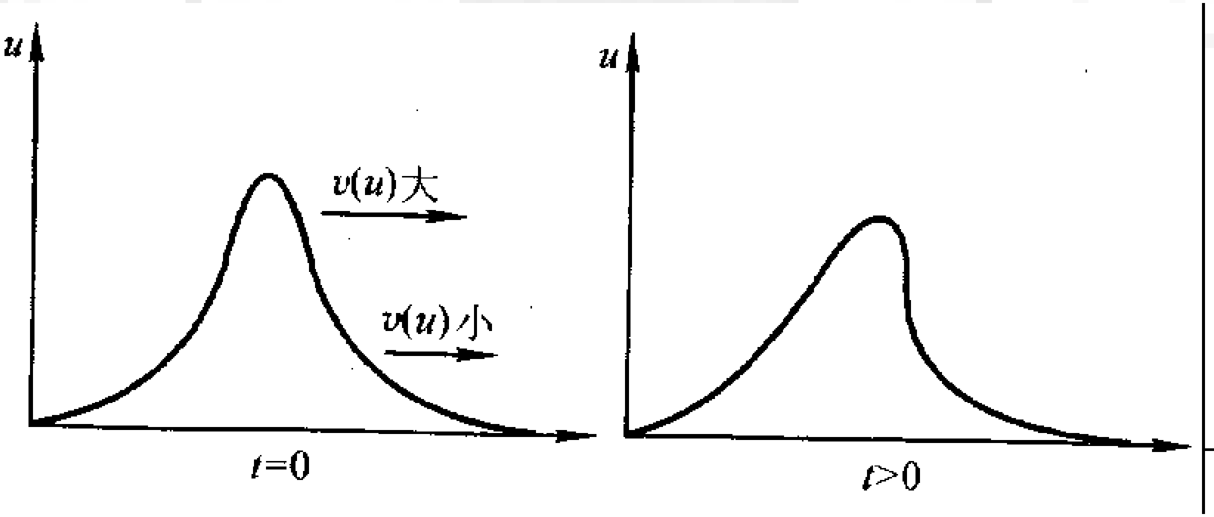
- ω为圆频率，$k=2\pi/\lambda$为波数，λ为波长，$\omega=k^3$，相速为$\omega/k=k^2$与k有关，即所谓色散。所以通解应该是求和表达式。

非线性物理：孤波物理

- 再考虑一个非线性但是无色散的微分方程：

$$u_t + uu_x = 0$$

- uu_x为非线性项，行波解是$u=u(x-vt)$且波速$v=u$，意即波形上不同高度点的速度不同，波速与高度成正比，因此波形在传播过程中一定发生变化：



- 最后考虑KdV方程：

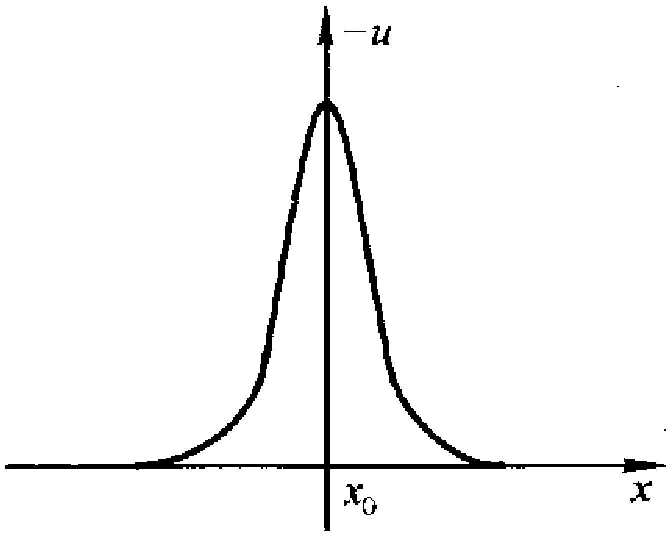
$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

- u_{xxx}为色散项，$6uu_x$为非线性项，两者相互抵消，得到孤波解：

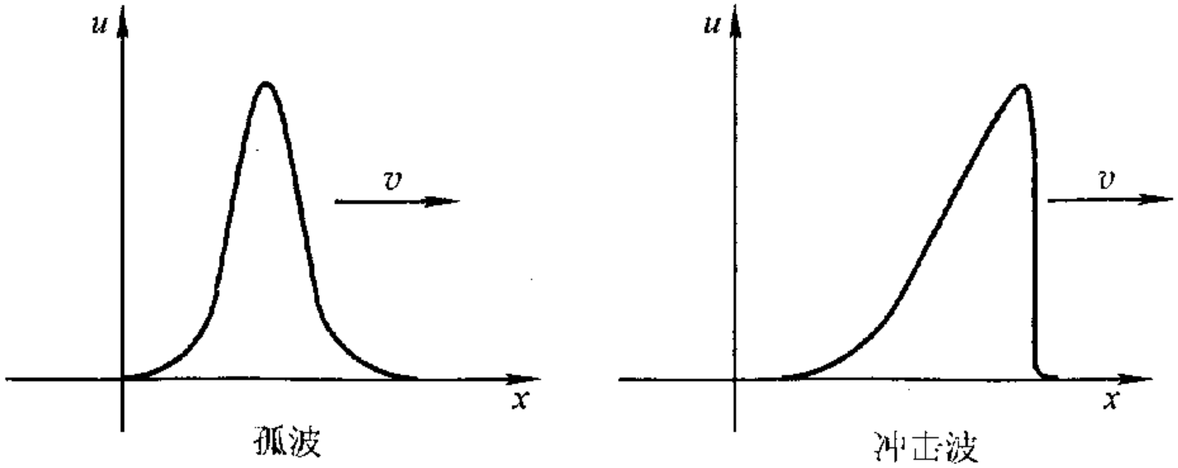
$$u(x,t) = -2k^2 \operatorname{sech}^2\{k(x-4k^2t-x_0)\}$$

- 可见波幅与波速关联，导致波幅高者波速大，典型孤波特征。

- 产生孤子的物理条件：色散与非线性共存并微妙竞争。



- 孤子代表的物理过程有一些共同的性质：
- (1) 能量有限，且分布在有限的空间范围内。
- (2) 弹性碰撞。
- 孤波在传播过程中不会弥散，而波包会弥散。冲击波波形前段是奇异的，也不是孤波。



KdV方程：水中的孤波

- **1894年G. de Vries在D. J. Korteweg指导下提交的博士论文中，KdV方程的原始形式是：**

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{q}{h}}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2}\right)$$

$$\sigma = \frac{1}{3}h^3 - Th/(\rho g)$$

- 上式 h 为水面的平衡高度，η 是平衡高度以上水波表面高度，α 是与流体匀速运动有关的小常数，g 是引力常数，T 是流体表面张力，ρ 是流体密度。

- 借助下面的变换可以将上述方程简化成无量纲形式：

$$t=\frac{\tau}{2}\sqrt{g/(h\sigma)},\quad x=-\zeta/\sqrt{\sigma},\quad u=\eta/2+\alpha/3$$

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0$$

- 对于 **KdV** 方程的求解不仅是描述孤波的需要，也促进了数学的发展，例如促使诸如逆散射的方法出现。
- 我们根据黄景宁一书来说明推导过程，显得比较枯燥无味！大家凑合着听听。^_^

KdV方程推导

- 推导过程先建立流体运动方程和边界条件，然后应用于浅水波运动。这一推导具有一般性，但不是非常严格。

- 假定流体不可压缩，无粘性，无旋，则有连续性和动量方程：

$$\nabla \cdot u = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + g \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

- 其中 ***u*** 速度，***p*** 压强，***g*** 指向 ***z*** 轴。无旋使得**rot *u*=0**，则存在：

$$u = \nabla \varphi$$

非线性物理：孤波物理

$$\Rightarrow (u\cdot\nabla)u = \nabla\left(\frac{1}{2}u^2\right) = \nabla\left(\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\right)$$

- 将上式代入动量方程，并对空间积分得到：

$$\frac{p-p_0}{\rho} = B(t) - \varphi_t - \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 - gz$$

- 引入变换： $\varphi \Leftarrow \varphi - \int (B(t) - gh_0)dt$

- 动量方程变成： $\dfrac{p-p_0}{\rho} = -\varphi_t - \dfrac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 - g(z-h_0)$

- 连续性方程变成**Laplace**方程： $\nabla^2\varphi = 0$

- 现在来建立边界条件。对于流体表面：

$$f(t,x,y,z)=0$$

$$f(t,x(t),y(t),z(t))=0$$

$$u=(u,v,w)=(dx/dt,dy/dt,dz/dt)$$

- 作微分变换得到： $f_t+uf_x+vf_y+wf_z=0$

- 如果再假定表面方程为：

$$z=\eta(t,x,y)\Rightarrow w=\eta_t+u\eta_x+v\eta_y$$

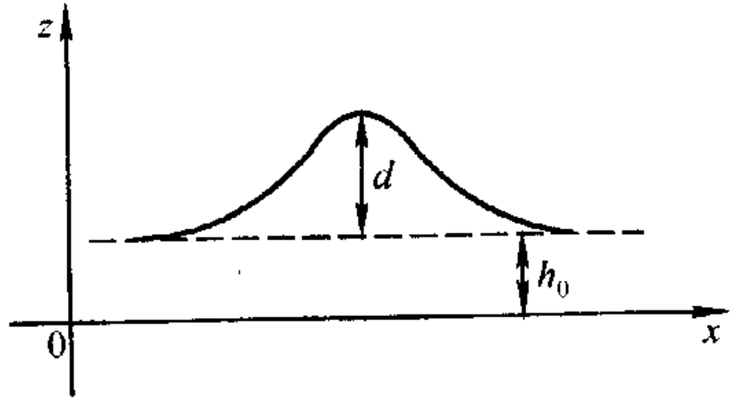
- 设 $\boldsymbol{p_0}$ 为大气压强，动量方程就变成：

非线性物理：孤波物理

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2\right) + g(z - h_0) = 0$$

- 现在来建立边界条件。对于水槽底部或水槽四壁： $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$

- 建立如图所示二维坐标系，则边界条件变成：



$$\varphi_z = 0 \qquad z = h_0 + \eta$$

- 如果流体流动过程按照行波处理，则假设波长为 ***l***，***$c_0=(gh_0)^{1/2}$***为近似波速，重新进行变量变换：

$$x = lx',\quad z = h_0 z',\quad t = lt'/c_0$$

$$\eta = d\eta',\quad \varphi = gld\varphi'/c_0$$

- 经过这个变化后所有变量都是无量纲的，将它们代入**Laplace**方程和边界条件，然后再去掉撇号，得到新的方程和边界条件：

$$\beta\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0 \qquad (0 < z < 1 + \alpha\eta)$$

$$\varphi_{zz} = 0 \quad if \quad z = 0$$

$$\begin{cases} \eta_t + \alpha\varphi_x\eta_x - \varphi_z / \beta = 0 \\ \eta_t + \varphi_t + \alpha\varphi_x^2 / 2 + \alpha\varphi_z^2 / 2\beta = 0 \end{cases} \qquad if \ z = 1 + \alpha\eta$$

$$\beta = h_0^2 / l^2,\quad \alpha = d/h_0$$

- 下面推导在长波长($\beta=h_0^2/l^2<<1$)和小振幅($d/h_0<<1$)近似下上述约化方程的解。前人证明，对于一个 x 的解析函数 $f(t,x)$，方程：

$$\beta\varphi_{xx}+\varphi_{zz}=0$$

的通解总是可以表示成：

$$\varphi=\sum_{0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(2m)!}\frac{\partial^{2m}f}{\partial x^{2m}}\beta^m z^{2m}$$

- 代入到下面边界条件：

$$\begin{cases}\eta_t+\alpha\varphi_x\eta_x-\varphi_z/\beta=0\\ \eta_t+\varphi_t+\alpha\varphi_x^2/2+\alpha\varphi_z^2/2\beta=0\end{cases}\qquad if\ \ z=1+\alpha\eta$$

- 分别得到：

$$\eta_t+\left[(1+\alpha\eta)f_x\right]_x-\beta\left[\frac{1}{6}\left(1+\alpha\eta^3\right)f_{xxxx}+\frac{1}{2}\alpha(1+\alpha\eta)^2 f_{xxx}\eta_x\right]+0(\beta^2)=0$$

- 和：

$$\eta+f_t+\frac{1}{2}\alpha f_x^2-\frac{1}{2}(1+\alpha\eta)^2\beta\left(f_{xxt}+\alpha f_x f_{xxx}-\alpha f_{xx}^2\right)+0(\beta^2)=0$$

- 因为α<<1，β<<1，略去 β^2 和 $\alpha\beta$ 等高阶项，令 $F=f_x$，然后将上式对 x 求导，化简后得到：

$$\eta_t + [(1+\alpha\eta)F]_x - \frac{1}{6}\beta F_{xxx} = 0$$

$$F_t + \alpha F F_x + \eta_x - \frac{\beta}{2} F_{xxt} = 0$$

- 取函数 ***F*** 为下列形式：

$$F = \eta - \frac{1}{4}\alpha\eta^2 + \frac{\beta}{3}\eta_{xx}$$

- 代入上述方程并只取α、β的一次项，则两个方程化成一个方程：

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{\beta}{6}\eta_{xxx} = 0$$

- 再进行下列变量代换，得到最后的KdV方程形式：

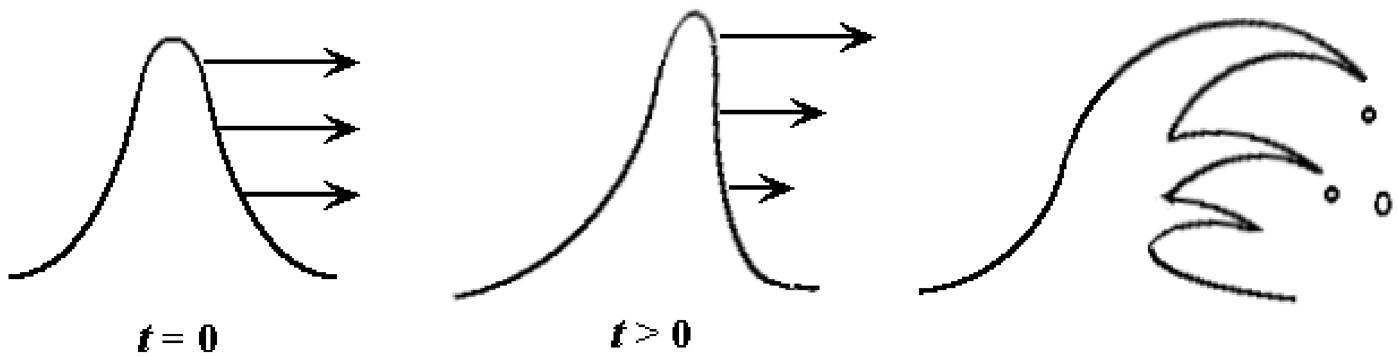
$$t' = \left(\frac{6}{\beta}\right)^{1/2} t, \quad x' = \left(\frac{6}{\beta}\right)^{1/2} x, \quad \eta' = -\frac{1}{4}\left(\alpha\eta + \frac{2}{3}\right)$$

$$\eta_t - 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0$$

- 上述方程的推导具有弱非线性的一般意义，显得非常数学化。下面我们介绍一种物理上更简单的推导方法，虽然数学上不是很严格。

KdV方程：非线性会聚效应

1. 当一个行波的不同部分有不同的行进速度时，将会出现会聚。
2. 边界对行波的粘滞力导致会聚，其它机制导致会聚。
3. 海滩边的浪花和风吹起的浪花就是会聚的写照：



- 考虑一一维行波，随时间 t 沿 x 轴方向传播。设介质中 x 处的粒子密度为 **$n(x, t)$**，考虑守恒律有 **$dn/dt=0$**，写成全微分：

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial n}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}=0 \qquad \frac{\partial n}{\partial t}+v\cdot\frac{\partial n}{\partial x}=0$$

- 这里 **dx/dt** 是行波速度，一般为时空函数，从而会聚不可避免。

- 波传播存在色散是基本常识：一束平面单色波与一列正弦波相对应。一个频率为 ω 沿 x 方向传播的平面波 **$u(x, t)$** 可以表示为：

$$u(x,t)=A\exp[i(kx-\omega t)]$$

- 这里 **$k=2\pi/\lambda$** 为波数。等相位面为：$\phi = kx-\omega t = \text{const}$

- 由$d\phi=0$给出等相位面的速度，即相速v：

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial t}dt=kdx-\omega dt=0 \qquad v=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{d\phi=0}=\frac{\omega}{k}$$

- 一个如下的线性微分方程具有平面波解：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-v_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+m^2u=0 \qquad u(x,t)=A\exp[i(kx-\omega t)]$$

- 运算可得：

$$-\omega^2+v_0^2k^2+m^2=0$$

$$\omega^2=v_0^2k^2+m^2 \qquad \omega(k)=\pm\sqrt{v_0^2k^2+m^2}$$

- 可见ω/k不是常数，所以波速v不是常数，有色散。

- 既然不同波数的平面波具有不同波速，而上述所有波数的波的叠加仍然是波动方程的解，一个波动（或称波包）的移动速度是由群速度决定的，波的群速度：

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \pm \frac{v_0^2 k}{\sqrt{v_0^2 k^2 + m^2}}$$

- 具有不同**k**值的波**(**群**)**，将具有不同的群速度。不同波数的各个子平面波以不同的群速度传播，所以所描述的波动在运动时将改变形状并弥散开来。于是，初始时刻出现的波包，会随时间的推移而发生变化，波包发生弥散，以至在某个时刻波包完全消失。

- 注意如下微分方程和色散关系之间的对应关系：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m^2 u = 0 \qquad\qquad -\omega^2 + v_0^2 k^2 + m^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -i\omega \qquad \frac{\partial}{\partial x} \longleftrightarrow ik$$

$$\omega^2 - \gamma^2 k^4 = 0 \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + \gamma^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u = 0$$

- 如上所述，一个线性波动由于在介质中传播时既存在色散，所以该波动是不稳定的。只有当在波动中存在非线性的会聚时，如果色散与会聚两种作用出现某种平衡，才会出现波形稳定的孤立波。在**KdV**方程中正是同时存在了这两种效应。

- 对于不可压缩介质，粒子质量不随时间与坐标变化可以等价于粒子速度**v**的守恒：

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

- 考虑水面波动的色散关系，可以证明，忽略表面张力，在重力作用下水波的色散关系为：

$$\omega(k) = gk \cdot \tanh kh$$

- 式中***g***为重力加速度，***h***为水的深度。进行级数展开，并略去高次项后有：

$$\omega(k) = \chi k - \beta k^3 \qquad \chi = \sqrt{gh} \qquad \beta = \frac{1}{6} h^2 \sqrt{gh}$$

- 由前面的对应关系，我们知道对应的微分方程应该是***KdV***：

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \chi \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \cdot \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\chi + v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$$

KdV方程的性质

- 推导条件：1-长波，即 β<<1；2-小振幅，即α<<1；3-弱非线性与弱色散；4-空间一维和时间一维；5-流体无内粘滞，不可压缩。
- KdV方程可以写成下述任意形式：

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0$$

- 其中 u 是动力学变量，方程满足如下标度变换，形式不变：

$$x \to b^{1/3}x \Rightarrow u_t + ab^{-1/3}uu_x + u_{xxx} = 0$$

$$t \to -t \Rightarrow u_t - ab^{-1/3}uu_x - u_{xxx} = 0$$

$$u \to a^{-1}b^{1/3}u \Rightarrow u_t - uu_x - u_{xxx} = 0$$

- 文献中常见的KdV方程有下列形式：

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \\ u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \\ u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \end{cases}$$

- **KdV**方程的标度不变性还表现如下几个特点：
- 时间平移不变性：$t \to t+c_1$。空间平移不变性：$x \to x+c_2$。
- 伽利略不变性：$x \to x+ct,\ t \to t,\ u(x,t) \to u(x+ct,\ t)+c/6$。
- 标度不变性：$x \to cx,\ t \to c^3t,\ u(x,t) \to c^{-2}u(cx,\ c^3t)$。

KdV方程的行波解

- **KdV**方程本身并不是只有行波解，**1967**年提出逆散射方法后还得到了一些其它解，如双孤子解。这里先讨论行波解。

- 对于一个微分方程：

$$G(x,t,u)=0$$

- 如动力学变量 ***u*** 具有如下实数解，且$\zeta\to\pm\infty$时$w(\zeta)\to 0$或常数：

$$u(x,t)=w(x-ct)=w(\zeta)$$

- 我们说这个行波解是孤波解。

非线性物理：孤波物理

- 对KdV方程： $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- 代入行波解得到：

$$-cw' - 6ww' + w''' = 0$$

$$w'' = 3w^2 + cw + A$$

- 考虑下述等式，就可以进行如下积分运算：

$$\frac{1}{2w'}\frac{d}{d\zeta}\left[(w')^2\right] = \frac{d\left[(w')^2/2\right]}{dw}$$

$$\frac{d\left[(w')^2/2\right]}{dw} = 3w^2 + cw + A$$

$$(w')^2/2 = w^3 + cw^2/2 + Aw + B = F(w)$$

- 因为行波解要求$\zeta\to\pm\infty$时，$w(\zeta)\to 0$，$w'(\zeta)\to 0$，$w''(\zeta)\to 0$，所以$A=B=0$。由此得到：

$$(w')^2 = w^2(2w+c) \qquad \int \frac{dw}{w\sqrt{(2w+c)}} = \pm\int d\zeta$$

- 假定：$w = -\dfrac{c}{2}\sec h^2\theta$

$$w(x-ct) = -\frac{c}{2}\sec h^2\left\{\frac{1}{2}c^{1/2}(x-ct-x_0)\right\}$$

- 上式中 x_0 是积分常数，表示 $t=0$时的波峰位置。

- 孤波解的性质：**1-** x 趋向无穷时 u 趋于**0**；**2-** 波是单向传播的；**3-** 波幅与波速成正比；**4- KdV**方程的色散与非线性刚好抵消，导致定常解；**5-** 给定初始条件，**KdV**方程解是唯一的。

孤波解的另一种阐释

1. KdV方程解的形式如下：

$$u = u(x - v_0 t) = u(\xi)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi} + \chi\frac{\partial u}{\partial \xi} - v_0\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0 \qquad (u-\alpha)\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0$$

$$\alpha = v_0 - \chi$$

积分一次得到： $$\beta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}u^2 - \alpha v = \mathrm{const} \equiv \mathrm{C}$$

用简约符号表示：$u' = \partial u/\partial\zeta$，$u'' = \partial^2 u/\partial\zeta^2$，化简上式得到：

$$\beta u'^2/2 + u^3/6 - \alpha u^2/2 - Cu = const = H$$

1. 积分常数***H***可以看成为体系的哈密顿量：

$$\frac{1}{2}u'^2+\mathrm{V}(u)=0 \qquad \mathrm{V}(u)=\frac{1}{6\beta}(u^3-3\alpha u^2-6\mathrm{C}u-6\mathcal{H})$$

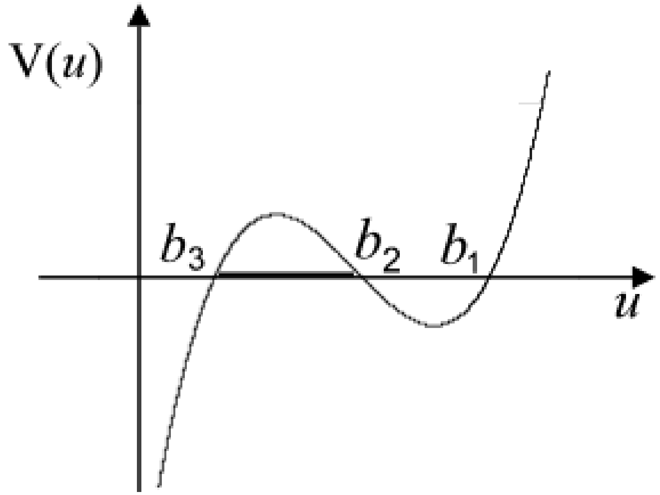
其中第一项为动能，第二项为势能。

2. ***V(u)***是一三次曲线，一般有三个零点，即$\boldsymbol{b_1>b_2>b_3}$，根据三次代数方程的解与系数的关系，有：$\boldsymbol{b_1+b_2+b_3=3\alpha}$，$\boldsymbol{\xi_0}$为积分常数。

$$6\beta\cdot\mathrm{V}(u)=-(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3)$$

$$3\beta\cdot u'^2=(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3)$$

$$\sqrt{3\beta}\int_{b_3}^{u}\frac{du}{\sqrt{(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3)}}=\xi-\xi_0$$



1. 上述方程的实数解有很高的要求：积分号中的根号内为正值！

2. 在区间[b_1, b_2]内$V(u)$<0，在(b_1, ∞)和(-∞, b_3)范围内V(u)随u单调变化，即无界，所以$du/d\xi$无界。

3. 只需考虑[b_2, b_3]范围内求解上述积分方程。引入：

$$u = b_3 + (b_2 - b_3)\sin^2\vartheta$$

积分方程变成(ζ为椭圆函数模数)：

$$\pm(\xi - \xi_3) = \sqrt{\frac{12\beta}{b_1 - b_3}}\int_0^{\varphi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\zeta^2\sin^2\vartheta}} \qquad \zeta^2 = \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_3}$$

注意到： $u = b_3 + (b_2 - b_3)\sin^2\vartheta \quad = b_2 - (b_2 - b_3)\cos^2\vartheta$

所以有： $u(\xi)=b_2-(b_2-b_3)\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{(b_1-b_3)}{12\beta}}(\xi-\xi_0),\varsigma\right)$

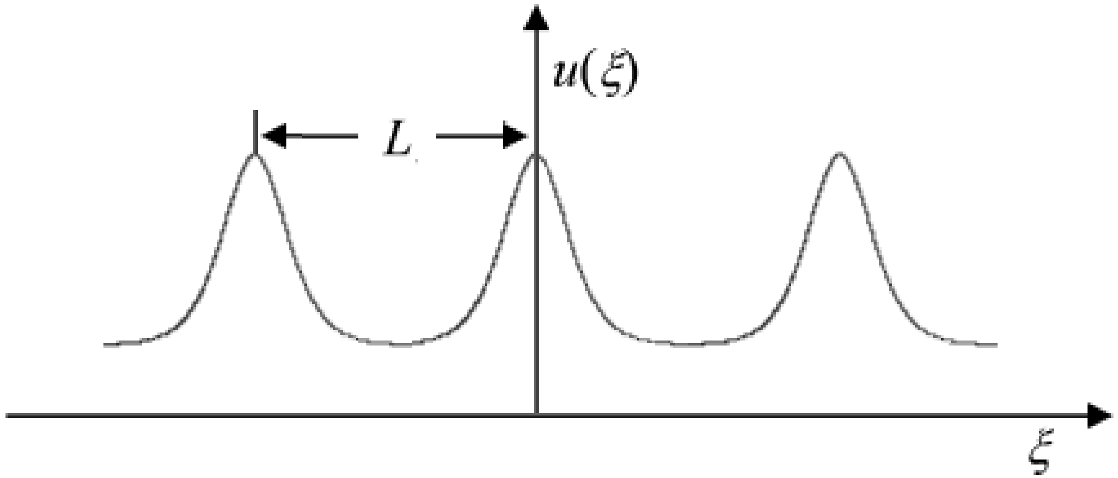
这是KdV方程的椭圆余弦波解，*cn(ξ)*波的周期为：

$$4\mathrm{K}(\zeta)=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\zeta^2\sin^2\vartheta}\,d\vartheta$$

所以*u(ξ)*是一个余弦周期函数，周期为：

$$L=2\mathrm{K}(\zeta)\sqrt{\frac{12\beta}{b_1-b_3}}$$

所以*u(ξ)*是空间周期为L的一列行波。它不具有局域性质，所以它不是孤立波



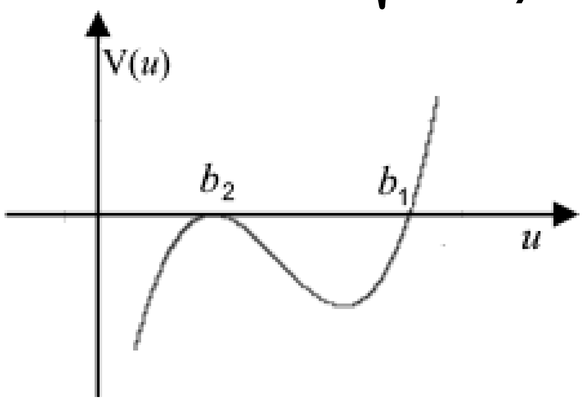
1. 需要考虑一些特殊情况，特别是椭圆模数ζ^2处于极端时的情况！

2. 先看$\zeta^2\rightarrow 0$即$b_3=b_2$时，椭圆余弦函数$cn(x)$演变为三角余弦函数$\cos(x)$。于是有：

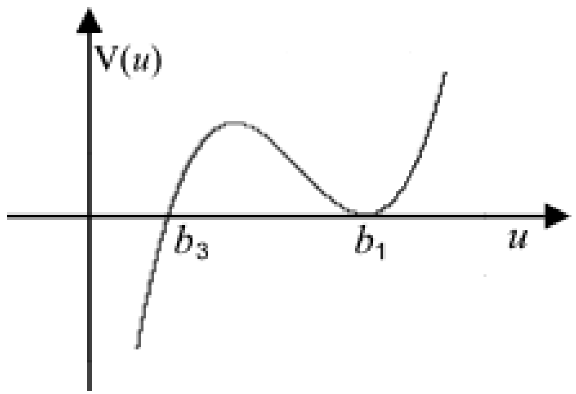
$$u(\xi)=b_2-(b_2-b_3)\cos^2\left(\sqrt{\frac{(b_1-b_3)}{12\beta}}(\xi-\xi_0)\right)$$

$$=b_2-(b_2-b_3)\cdot\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\sqrt{\frac{(b_1-b_3)}{12\beta}}(\xi-\xi_0)\right)$$

$$=\frac{b_2+b_3}{2}+\frac{b_2-b_3}{2}\cos\sqrt{\frac{(b_1-b_3)}{3\beta}}(\xi-\xi_0)$$



a



b

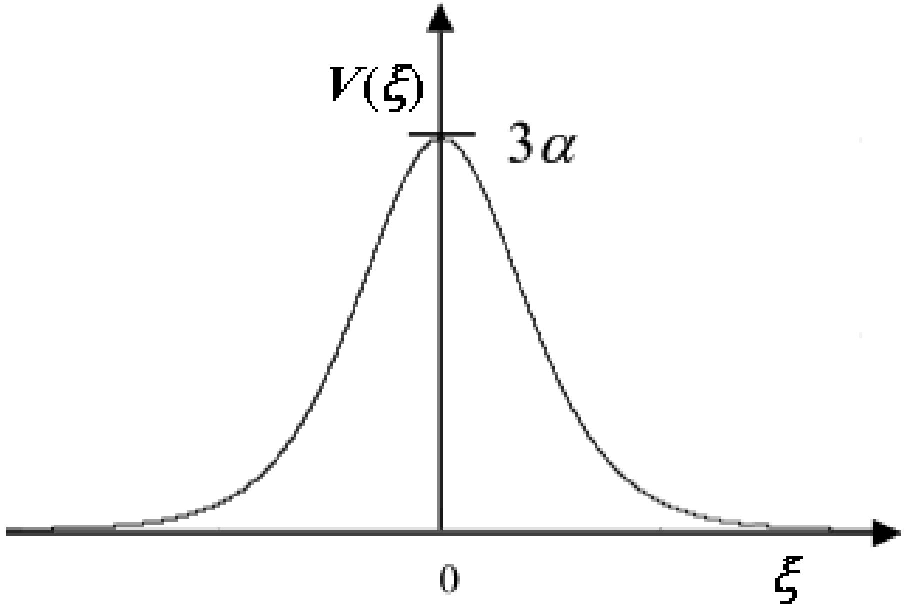
1. 这是振幅十分小的余弦波解，它是由于幅度很小的非线性项可以忽略的结果。同样不是孤波解。

2. 再看$\zeta^2\to 1$即$b_3=b_2$时，椭圆余弦函数*cn(x)*演变为双曲正割函数*sech(x)*。于是有：

$$u(\xi)=b_1-(b_1-b_3)\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{(b_1-b_3)}{12\beta}}(\xi-\xi_0)\right)$$

令 *V(u)* 中的常数 *C=H=0*，$b_1=b_2=0$，$b_3=3\alpha=(v_0-\chi)$。上面解变成(就是孤波解)：

$$u(\xi)=3\alpha\cdot\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4\beta}}(\xi-\xi_0)\right)$$



KdV方程：孤波解的相图

- **KdV方程的形式如下，注意到V(u)是u的三次多项式：**

$$\frac{1}{2}u'^2+\mathrm{V}(u)=0 \qquad u'u''=-V'(u)u' \qquad \begin{cases} u'=v \\ v'=-\mathrm{V}'(u) \end{cases}$$

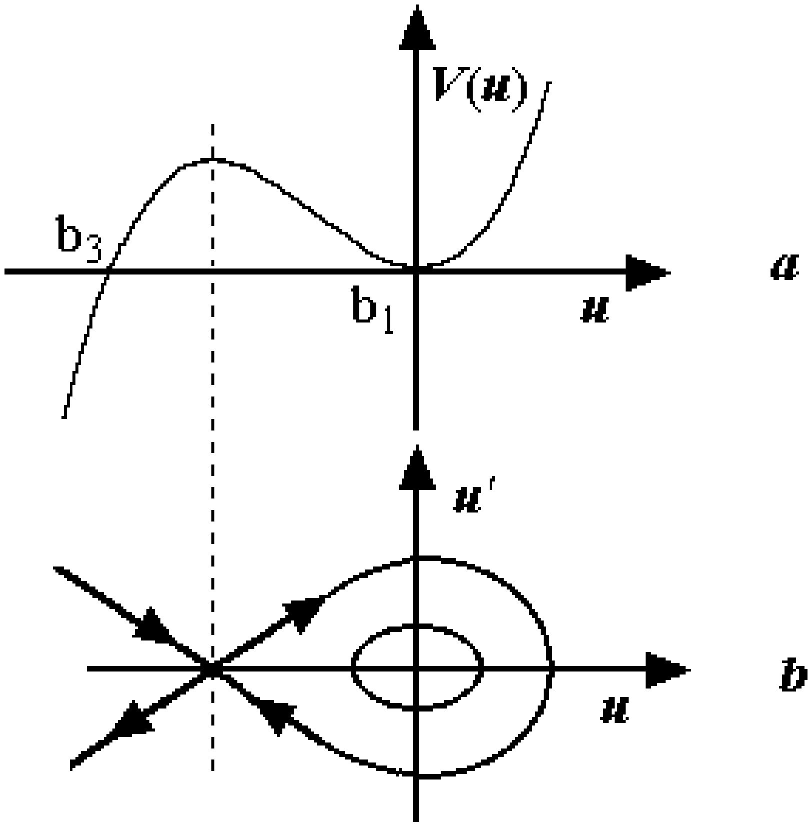
雅可比矩阵为： $$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathrm{V}''(u) & 0 \end{pmatrix}$$

特征值： $$\lambda^2=-\mathrm{V}''(u)$$

- 在***V(u)***的极小值处，***V″(u)*>0**，特征值是共扼虚数，代表***V(u)***的极小值处是中心点。极大值处是鞍点！
- 该方程只有一个鞍点，如果沿着一条流形出发，在绕了一圈之后又回到鞍点。这种从鞍点出发又回到鞍点的流形称为同宿线。由此可见**KdV**方程的孤立波解是与相平面上的同宿线相联系的。

KdV方程：孤波解的相图

1. 孤波解的相图如下：



作业：数值求解KdV方程：

- 利用差分方法求解KdV方程的演化动力学。
- KdV方程的形式如上，初始波形取如下两类双曲函数形式：
- u_t-6uu_x+u_{xxx}=0, $u(x, 0)=-2\mathrm{sech}^2 x$；$u(x, 0)=-6\mathrm{sech}^2 x$
- u_t-6uu_x+u_{xxx}=0, $u(x, 0)=-\mathrm{sech}^2 x$；$u(x, 0)=-3\mathrm{sech}^2 x$； $u(x, 0)=-4\mathrm{sech}^2 x$； $u(x, 0)=-5\mathrm{sech}^2 x$。
- 分析以上KdV方程解的动力学演化特征。

KdV方程一般求解：逆散射法

- 一般情况下不知道KdV方程一定有行波解，这时就不能使用前面的行波解求法。而KdV方程从形式上看是一个难啃的骨头！
- 这里介绍1967年提出的逆散射法，对于孤波问题求解非常重要。此方法立足于量子力学对薛定谔方程求解的大量技巧。
- 所谓逆散射问题来自于物理学中的薛定谔方程的散射问题。对于给定的势函数，一维定态薛定谔方程为：

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+u(x)\right]\psi=\lambda\psi, \quad -\infty<x<\infty$$

- 薛定谔方程左边是关于ψ的算符，如果其作用于函数ψ得到一个常数λ乘以该函数，则是该算符的本征值方程，λ和ψ分别是本征值和本征函数，$u(x)$是势函数。

- 如果哈密顿不依赖时间，状态为定态，描述状态的波函数可以分离成含时和空间部分。如不考虑含时部分，为定态薛定谔方程。

- 要使薛定谔方程有解，需要满足**Faddeev**条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|u(x)|dx<\infty$$

- 所以必须有 $x\to\pm\infty$时 $u(x)\to 0$。因此$x\to\pm\infty$时方程退化为：

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda\right)\psi=0 \quad if \quad u(\pm\infty)=0$$

- 下面讨论本征值$\lambda<0$和$\lambda>0$两种情况。如果$\lambda<0$，它一定是有限分立的 λ_n，称为分立谱。设定：

$$k_n=(-\lambda_n)^{1/2}, \quad n=1,2,\ldots,N, \quad k_1<k_2<\ldots<k_N$$

- 则本征函数$\psi_n(x)$在 $x\to\infty$时渐近形式为：

$$\psi_n(x)=c_n\exp(-k_n x) \quad as \quad x\Rightarrow\infty$$

- 其中 c_n 为实常数，可以由归一化条件确定：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2(x)dx=1$$

- 显然，$\lambda<0$的情况$\psi_n(x)$呈现束缚形态，本征函数是分离的。

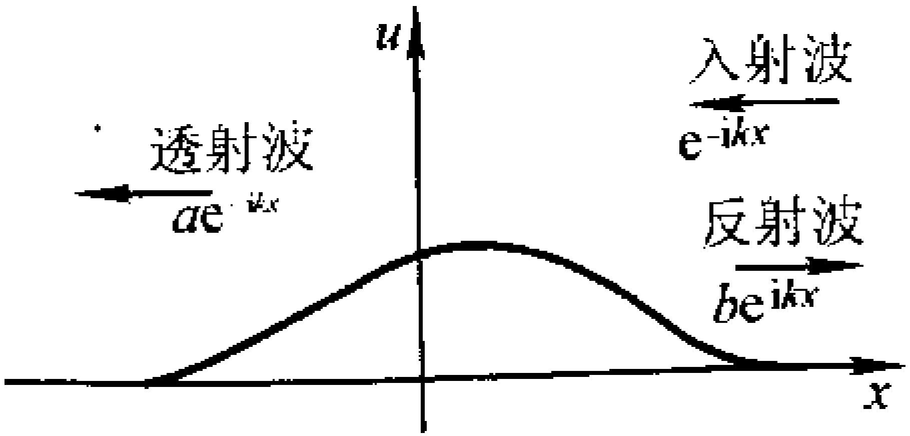
- $\lambda>0$时，$k^2=\lambda$。本征函数$\psi(x)$呈连续分布态，无穷远渐近性质是：

$$\psi(x)=\begin{cases} \exp(-ikx)+b\cdot\exp(ikx) & as \quad x\to\infty \\ a\cdot\exp(-ikx) \quad as & x\to-\infty \end{cases}$$

- 上述性质在物理上对应于势函数 $u(x)$ 对于本征函数的散射，包括在$x\to\infty$处的入射波$\exp(-ikx)$和反射波$b(k)\cdot\exp(ikx)$，以及在$x\to-\infty$处的透射波$a(k)\cdot\exp(ikx)$。

- $a(k)$和$b(k)$称为透射和反射系数，由于本征函数已经归一化，所以有$|a|^2+|b|^2=1$，反映了能量守恒。

- 势函数对本征函数的散射可以示意地表示如图。



- 上述过程表述为：给定$u(x)$，求解一维定态薛定谔方程得到$\psi(x)$。它必须满足渐近性质。如果本征值$\lambda_n<0$，由渐近性质得到 k_n 和 c_n；如果本征值$\lambda>0$，由连续的本征函数渐近行为得到 $b(k)$ 和 $a(k)$，注意到归一化条件。

- 这就是所谓的正散射问题。

- 所谓逆散射问题就是给定 k_n 和 c_n，或者 $b(k)$和 $a(k)$，来求势函数 $u(x)$，这个势函数刚好就是我们要求的KdV方程的解。

- 逆散射问题很大程度上决定于Gelfand-Levitan-Marchenko(GLM)积分方程和求解：

$$K(x,y,t)+B(x+y,t)+\int_x^\infty B(y+z,t)K(x,z,t)dz=0 \quad (y>x)$$

- 其被积函数$B(x+y,t)$为：

$$B(x+y,t)=\sum_{n=1}^{N} c_n^2(t)\cdot exp(-k_n(x+y))+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(k,t)\cdot exp(ik(x+y))dk$$

- 因此，如果给定 k_n 和 c_n (λ_n<0)，或者 $b(k)$和 $a(k)$ (λ>0) ，就可以求得 $B(x+y, t)$，代入GLM方程，得到 $K(x, y, t)$，势函数 $u(x)$为：

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t)$$

- 可以看到，绕了一个很大的弯弯，终于似乎可以求得 $u(x)$了。

- 事实上，除非 $b(k)$=0，否则GLM方程很难解析，只有数值解。$b(k)$=0就是所谓的无反射势问题。

- 可是，KdV方程中 u 是time dependent的，即 $u(x, t)$而非 $u(x)$。

- 解决这一问题必须看**KdV**方程的初值问题，牵涉更广的数学。其思路是寻找**KdV**与薛定谔方程的关系和含时项的处理。

- 定义**Miura**变换： $u = v^2 + v_x$

- 其中 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 假定分别是下列**KdV**方程的解：

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0$$

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

- 我们总可以设$v=\psi_x/\psi$，代入到**Miura**变换中得到方程：

$$v = \psi_x / \psi \Rightarrow u = \psi_{xx} / \psi$$

- 这一方程与一维定态薛定谔方程很类似，通过如下伽利略变换就可以得到完全一样的数学形式。

$$\begin{cases} u(x,t) = u'(x',t') - \lambda \\ x = x' + 6\lambda t' \qquad\qquad , \quad (-\infty < \lambda < \infty) \\ t = t' \end{cases}$$

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)\right]\psi = \lambda\psi, \quad -\infty < x < \infty$$

- 这里的意义在于：如果ψ是薛定谔方程的解，u是KdV方程的解，那么这两个解就有 $u=\psi_{xx}/\psi$ 的关系。

- 另外，数学还证明：如果$u(x,t)$是KdV方程的解，而且满足$|x|\to\infty$时$u\to 0$很快，则一维定态薛定谔方程分离本征值 λ_n为常数，与时间无关。

- 这就是说，从$u(x,0)$和$u(x,t)$出发求得的一维定态薛定谔方程分离本征值 λ_n是一样的。因此，只要给定$u(x,0)$，无需通过求解KdV方程而得到$u(x,t)$ (事实上，我们在这里折腾就是为了要求KdV方程)，就可以求得λ_n和全部初始散射系数$c_n(0)$, $b(k,0)$, $a(k, 0)$。

- 其次，**GGKM (C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura)** 证明了如下重要的含时关系：

$$c_n(t)=c_n(0)\cdot exp(4k_n^3t)$$

$$b(k,t)=b(k,0)\cdot exp(i8k_n^3t)$$

$$a(k,t)=a(k,0)$$

- 这样，只要给定**KdV**方程的 ***u(x,0)***，通过逆散射方法求 ***u(x, t)***已经水到渠成了，哈哈。

- **(1)** 给定如下**KdV**方程及初值：

$$\begin{cases} u_t-6uu_x+u_{xxx}=0, \quad t>0, \quad -\infty<x<\infty \\ u(x,\ 0)=u_0(x) \end{cases}$$

- 我们求解下列薛定谔方程以求得 ***k_n, c_n(0)***和 ***b(k, 0)***：

$$\psi_{xx} + (\lambda - u_0(x))\psi = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

- **(2) 根据GGKM关系求解含时的散射因子：**

$$k_n = const.$$

$$c_n(t) = c_n(0) \cdot exp(4k_n^3 t)$$

$$b(k,t) = b(k,0) \cdot exp(i8k_n^3 t)$$

$$a(k,t) = a(k,0)$$

- **(3) 求解GLM方程的被积函数：**

$$B(x+y,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n^2(0) \cdot exp\left[8k_n^3 t - k_n(x+y)\right] +$$

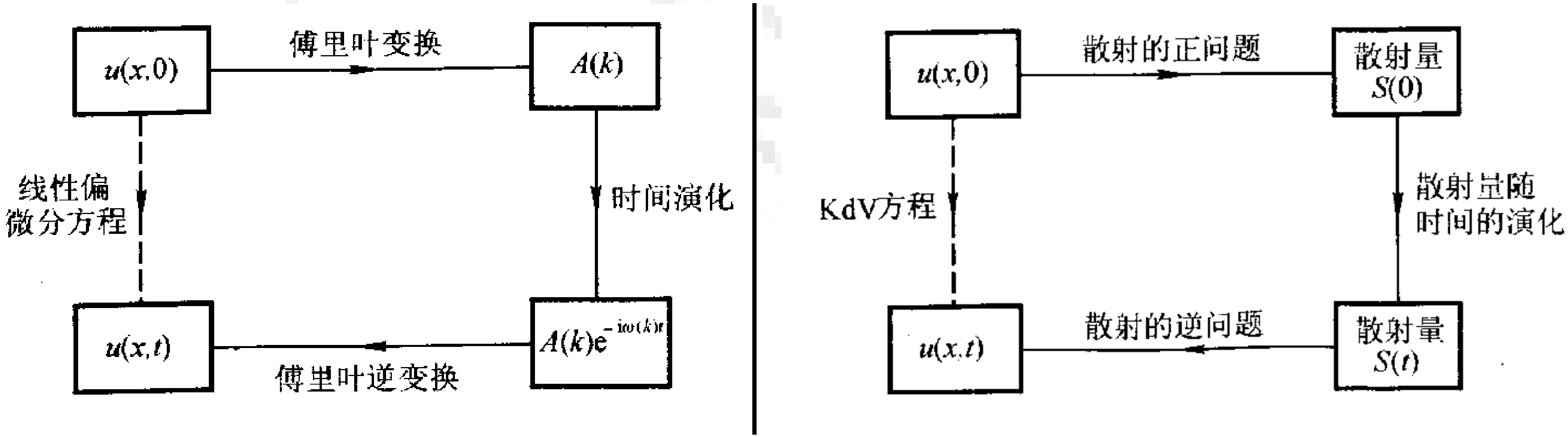
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k,0) \cdot exp\left[i8k^3 t + ik(x+y)\right] dk$$

非线性物理：孤波物理

- (4) 将***B(x+y,t)***代入GLM方程，求出***K(x,y,t)***，最后由：

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t)$$

- 求得***u(x, t)***，大功告成！



举例说明：

- 先看看无放射势情况，原因在于如果 ***b(k,t)***非零，**GLM**方程中的积分项依然难以解析积出！
- 求解如下**KdV**初值问题：

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = -2\operatorname{sech}^2 x \end{cases}$$

- ***t*=0**时对应的薛定谔方程为：

$$\psi_{xx} + (\lambda - u(x,0))\psi = 0 \Rightarrow$$

$$\psi_{xx} + (\lambda + 2\operatorname{sech}^2 x)\psi = 0$$

$$\because x \to \pm\infty \Rightarrow \operatorname{sech} x \Rightarrow 0$$

- 此方程只有束缚态解，分立本征值唯一。

非线性物理：孤波物理

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow k_1 = \sqrt{-\lambda_1} = 1$$

$$\because \lambda < 0 \quad \therefore b(k,0) = 0 \qquad \psi_1(x) \propto \sec hx = \sec hx$$

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^2(x)dx = 1 \quad \therefore \psi_1(x) = \sec hx / \sqrt{2}$$

$$\because \sec hx = 2/(e^x + e^{-x})$$

$$\therefore x \to \infty \Rightarrow \psi_1(x) = \sqrt{2}\exp(-x)$$

$$c_1(0) = \sqrt{2} \Rightarrow c_1(t) = \sqrt{2}\exp(4t)$$

$$B(x+y,t) = 2\exp(8t-(x+y))$$

- 代入**GLM**方程得到：

$$K(x,y,t)+2\exp(8t-(x+y))+$$

$$+2\int_x^{\infty}K(x,z,t)\exp(8t-(y+z))dz=0$$

- 对 ***K(x,y,t)***分离变量：

$$K(x,y,t)=L(x,t)\exp(-y)$$

$$L(x,t)+2\exp(8t)L(x,t)\int_x^{\infty}\exp(-2z)dz=0$$

$$L(x,t)=\frac{-2\exp(x)}{1+\exp(2x-8t)}\Rightarrow$$

$$K(x,y,t)=\frac{-2\exp(x-y)}{1+\exp(2x-8t)}$$

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t) =$$

$$= \frac{8\exp(2x-8t)}{(1+\exp(2x-8t))^2} = -2\operatorname{sech}^2(x-4t)$$

- 可以看到，这是一个单孤子解，波幅为-2，速率为4。
- 对于另一个初值问题：

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = -6\operatorname{sech}^2 x \end{cases}$$

- 对于另一个初值问题：

- 步骤类似，但是有两个分立本征值：

$$\psi_{xx} + (\lambda - u(x,0))\psi = 0 \Rightarrow$$

$$\psi_{xx} + (\lambda + 6\,\mathrm{sech}^2 x)\psi = 0$$

$$\lambda_1 = -1 < 0, \quad \lambda_2 = -4 < 0 \Rightarrow k_1 = 1, \quad k_2 = 2$$

$$\because \lambda < 0 \quad \therefore b(k,0) = 0$$

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^2(x)dx = 1 \quad \therefore \psi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\tanh(x)\,\mathrm{sech}(x)$$

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2^2(x)dx = 1 \quad \therefore \psi_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sech}^2(x)$$

$$\therefore x \to \infty \Rightarrow$$

$$\psi_1(x) = \sqrt{6}\exp(-x); \quad \psi_2(x) = 2\sqrt{3}\exp(-2x)$$

$$c_1(0) = \sqrt{6} \Rightarrow c_1(t) = \sqrt{6}\exp(4t)$$

$$c_2(0) = 2\sqrt{3} \Rightarrow c_2(t) = 2\sqrt{3}\exp(32t)$$

$$B(x+y,t) = 6\exp(8t-(x+y)) + 12\exp(64t-2(x+y))$$

$$K(x,y,t) + 6\exp(8t-(x+y)) + 12\exp(64t-2(x+y)) + \\ + \int_x^\infty K(x,z,t)\{6\exp(8t-(x+y)) + 12\exp(64t-2(x+y))\}dz = 0$$

非线性物理：孤波物理

$$K(x,y,t)=L_1(x,t)\exp(-y)+L_2(x,t)\exp(-2y)$$

$$L_1(x,t)=6\{\exp(72t-5x)-\exp(8t-x)\}/D$$

$$L_2(x,t)=-12\{\exp(64t-2x)+\exp(72t-4x)\}/D$$

$$D(x,t)=1+3\exp(8t-2x)+3\exp(64t-4x)+\exp(72t-6x)$$

$$u(x,t)=-2\frac{\partial}{\partial x}\left(L_1\exp(-x)+L_2\exp(-2x)\right)$$

$$=-12\frac{3+4\cosh(2x-8t)+\cosh(4x-64t)}{(3\cosh(x-28t)+\cosh(3x-36t))^2}$$

- 这是一个双孤子解。