

# 非线性物理：元胞自动机

---

从最简单开始：

- 考虑Pascal三角形，也就是杨辉三角形了。

		1				...	0	1	0	...				
	1	1				...	0	1	1	0	...			
	1	2	1			...	0	1	2	1	0	...		
	1	3	3	1		...	0	1	3	3	1	0	...	
1	4	6	?	1		...	0	1	4	6	4	1	0	...

- 简单说，三要素：形态pattern，演化规则rule，动力学dynamics。  
。Pascal三角形的演化规则如下：

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 ,$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 .$$



## 非线性物理：元胞自动机

---

- 为便于描述，Pascal三角形可以变种为：

0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	2	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	3	0	3	0	1	0	0	0
0	1	0	4	0	6	0	4	0	1	0	0

- 演化规则就可以简单写成：

$$B(n) = A(n-1) + A(n+1)$$

- 在元胞自动机中，经常使用二进制演化规则mod 2:

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, \text{ and } 1 + 1 = 0.$$

- 一个 $abc \bmod 2$ 数列就可以排成成8种组合：000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111，即 $2^3$ 种。

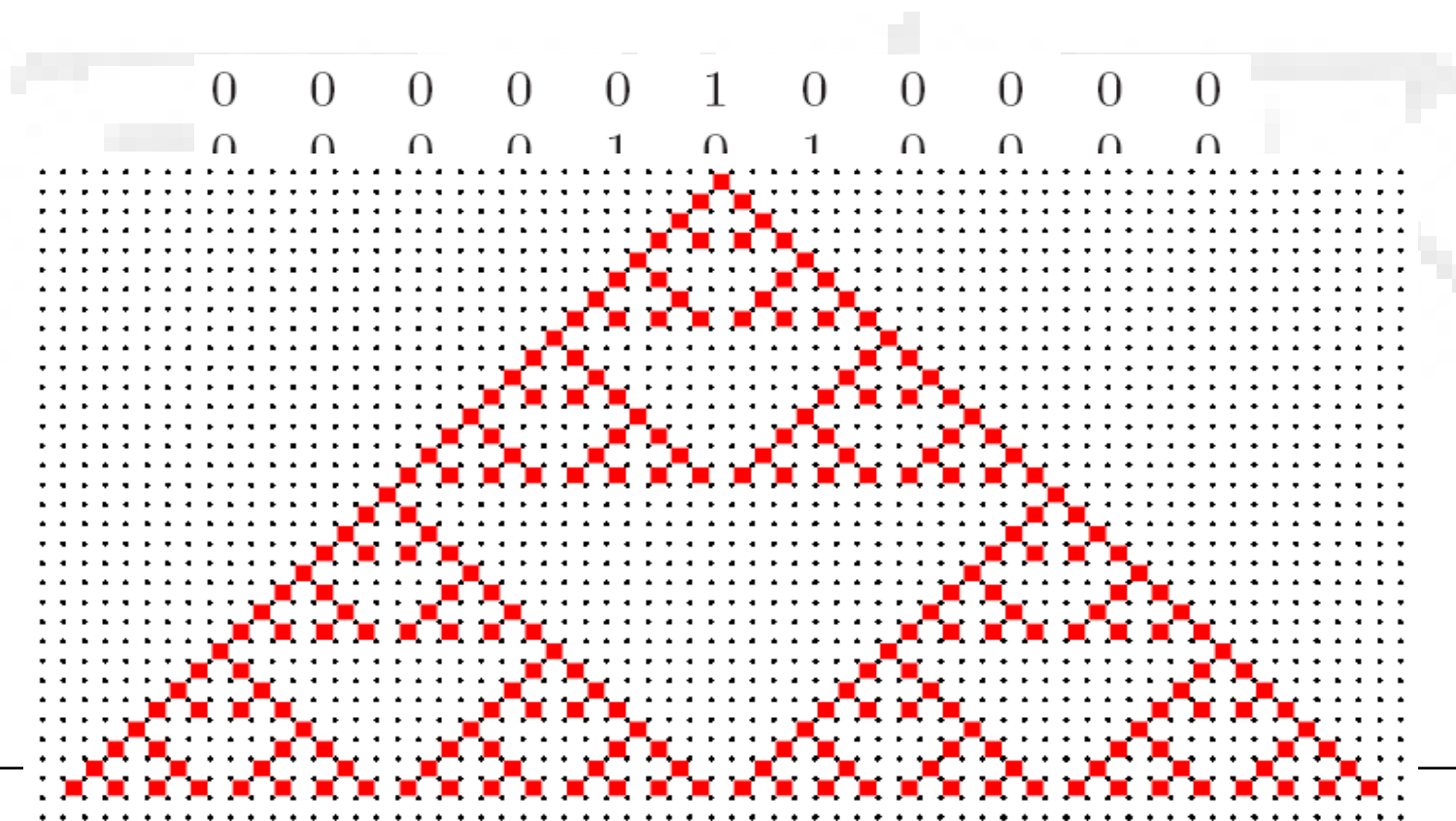


## 非线性物理：元胞自动机

- 由此，二进制的Pascal三角形演化规则变成(A为*i*行，B为*i+1*行):

$$B(n) = A(n-1) + A(n+1) \pmod{2}, \quad A(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ is odd} \\ 0 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

- 应用上述规则，Pascal三角形的形态演化图示为:



## 非线性物理：元胞自动机

---

- 就二进制杨辉 $\Delta$ 作一些游戏作业：
- (1)按行排列顺序，1的个数是1,2,3,4,5,4,4,8,2,3,3,8,4,8,8,16,2,4,4,8,那么第50个数是多少？
- (2)对于第 $n+1$ 行，1的数目是 $2^j$ 个，这里 $j$ 是此行数 $n$ 以二进制表示时的1数目。



## 非线性物理：元胞自动机

---

- 由Pascal三角形演化作一些推广，就是元胞自动机的雏形了。
- 给定一个演化规则，改变初始状态，看看演化的结果。注意一维尺度的影响，是否应用周期边界条件：

(a) ( ... 000001001001000000 ... ) (3 ones, 3 apart)

(b) ( ... 000011001100000000 ... ) (two pairs of ones)

(c) ( ... 111000111000111000 ... ) (alternating triples of ones and zeros)

(d) ( ... 010001011010001101 ... ) (random)

$$B(n) = A(n - 1) + A(n + 1) \pmod{2} .$$

- 上述规则称为**101**规则，意即 **$B(n)=A(n-1)+0+A(n+1)$** 。



## 非线性物理：元胞自动机

---

- 或者给定初始状态，看看不同演化规则给出的演化结果。注意一维尺度的影响，是否应用周期边界条件：

$$B(n) = A(n-1) + A(n) + A(n+1) \pmod{2}.$$

(a) ( ... 000001001001000000 ... ) (3 ones, 3 apart)

(b) ( ... 000011001100000000 ... ) (two pairs of ones)

(c) ( ... 111000111000111000 ... ) (alternating triples of ones and zeros)

(d) ( ... 010001011010001101 ... ) (random)

- 上述规则成为**111**规则，意即 **$B(n)=A(n-1)+A(n)+A(n+1)$** 。
- 对应地，**10101**规则： **$B(n)=A(n-2)+0+A(n)+0+A(n+2)$** 。



## 非线性物理：元胞自动机

---

### 奇偶规则：

- 讨论简单元胞自动机的演化规则，以便给出更严格的定义。
- 规则虽然简单，但形态却异彩纷呈！例如1970年代Fredkin提出的规则体系。
- 对于二维方格子，一个格位代表一个元胞 $r(i,j)$ ，函数 $\psi_t(r)$ 表示其在 $t$ 时刻的状态，服从 $\text{mod } 2$ 。
- $\psi_{t+1}(r) = \sum \psi_t(r')$ ， $r'$ 为 $r$ 四最近邻。 $\psi_{t+1}(r)=0$ ，白色； $=1$ ，黑色：
- $\psi_{t+1}(i,j) = \psi_t(i+1,j) \oplus \psi_t(i-1,j) \oplus \psi_t(i,j+1) \oplus \psi_t(i,j-1)$ 。 $1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0$ ， $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$ 。



## 非线性物理：元胞自动机

- 反复使用上述规则可以产生漂亮复杂的图形。

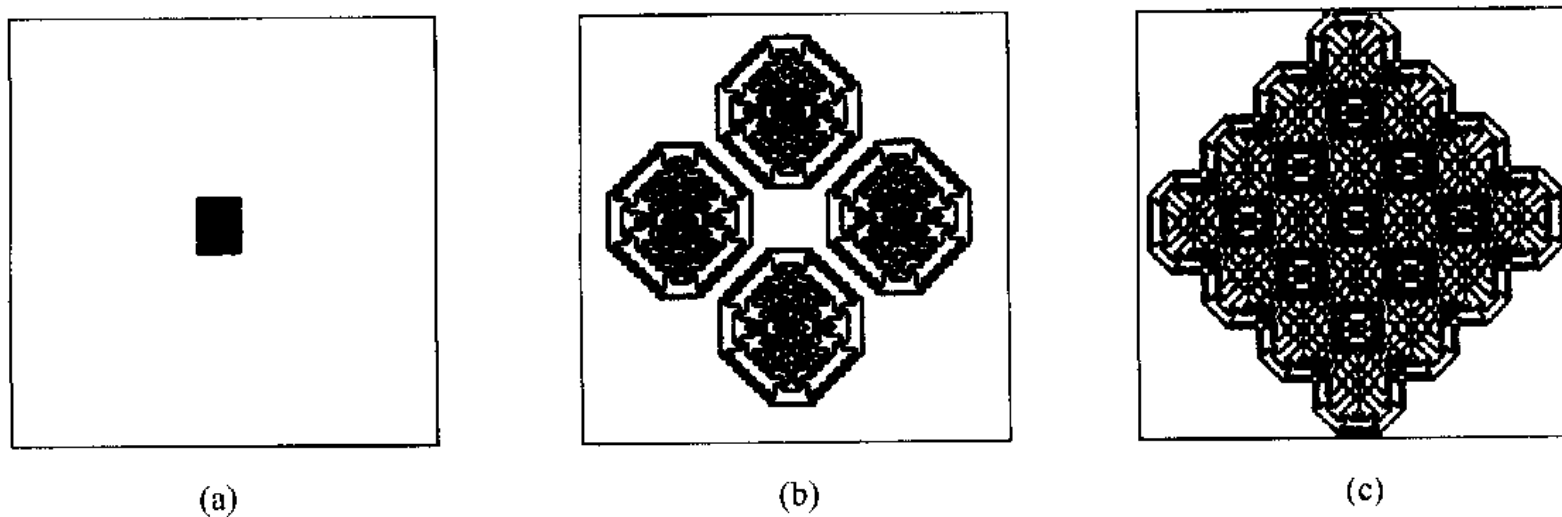


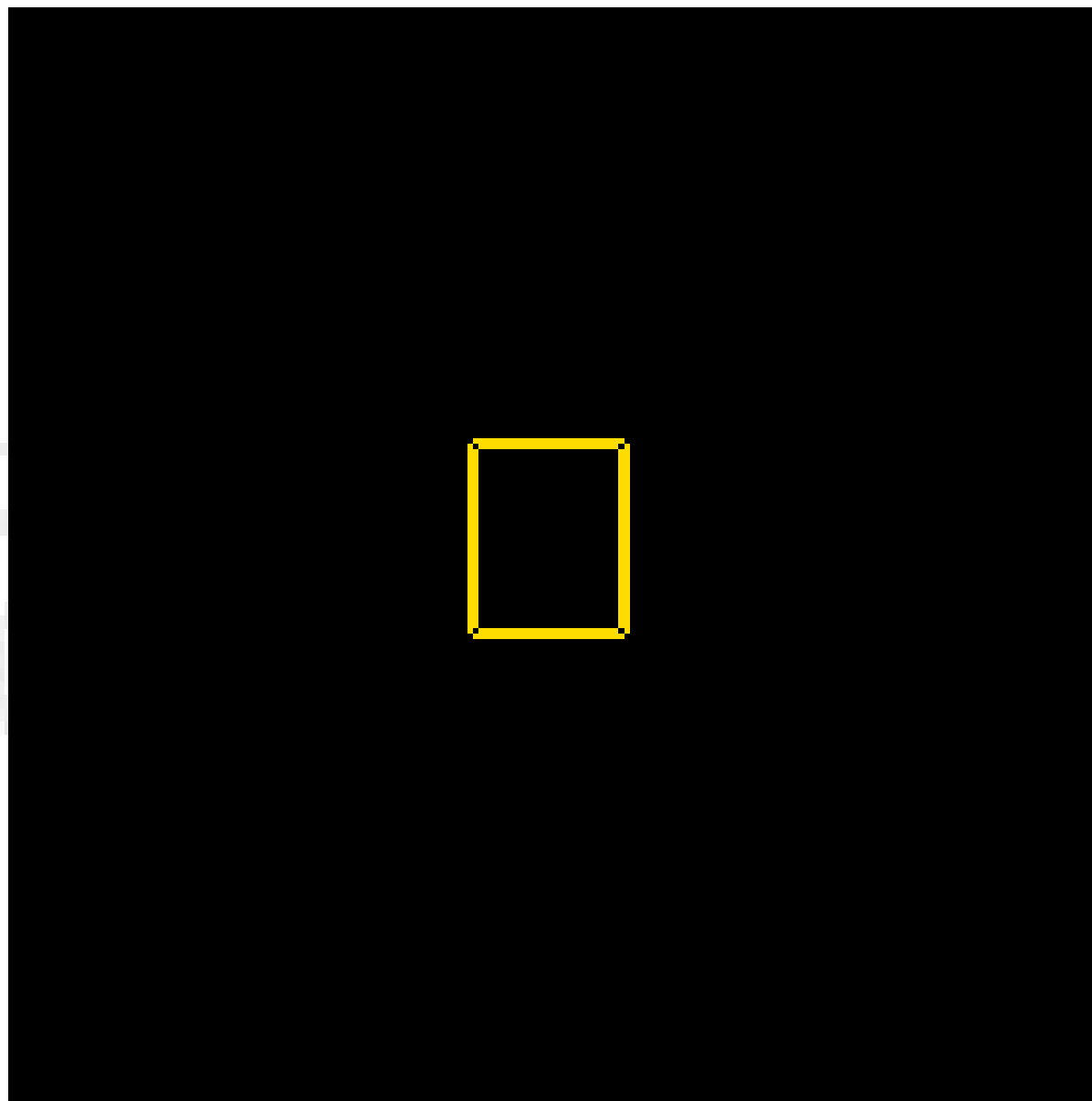
图 1.2 在  $256 \times 256$  周期性网格上的  $\oplus$  规则

(a) 为初始构形；(b) 和 (c) 分别为  $t_b = 93$  和  $t_c = 110$  迭代后的构形



# 非线性物理：元胞自动机

---



## 非线性物理：元胞自动机

- 这种演化有一个有趣的性质：迭代 $2^n$ 次时，初始图形有可能被复制；当点阵 $L=2^n$ 时， $L/2$ 次迭代导致初始元胞状态消失。
- 图形复制示于下图：

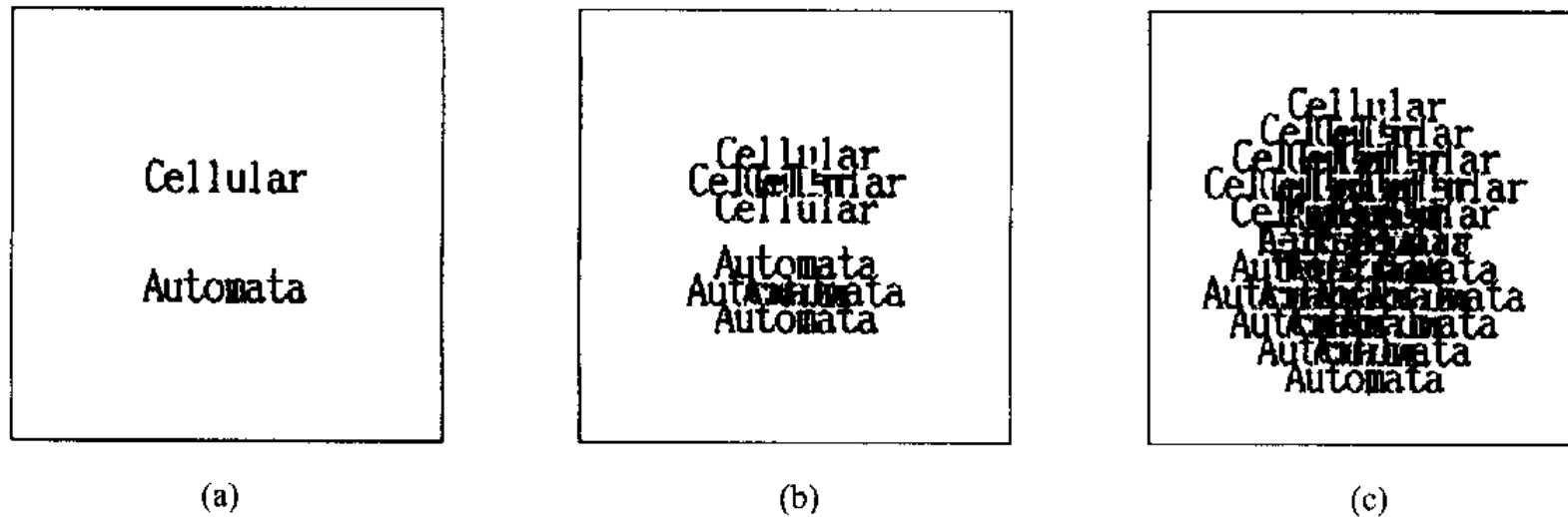


图 1.3 当迭代次数为  $2^n$  时， $\oplus$  规则复制任意初始图形

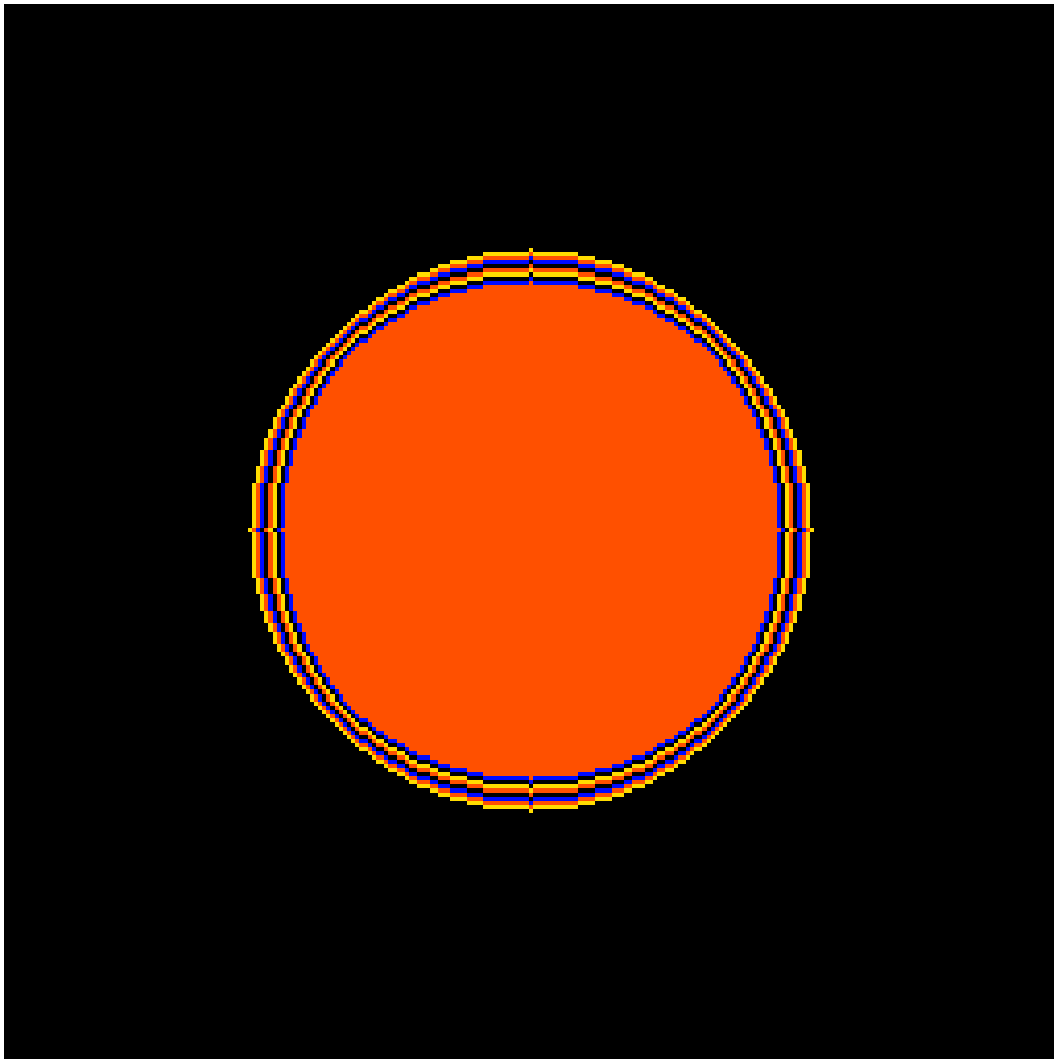
(a) 表示时间  $t_a = 0$  的初始图形；(b) 和 (c) 表示时间  $t_b = 16$  和  $t_c = t_b + 32$  相继迭代的图形

Cellular  
Automata



## 非线性物理：元胞自动机

---



- 这种复制行为源于迭代转换运算规则：
- $$\psi_{t+1}(i,j) = \psi_t(i+1,j) \oplus \psi_t(i-1,j) \oplus \psi_t(i,j+1) \oplus \psi_t(i,j-1)$$
- 如果是二次迭代，再次使用上述规则，得到：

## 非线性物理：元胞自动机

---

- $$\begin{aligned}\psi_{t+1}(i,j) = & \psi_{t-1}(i+2,j) \oplus \psi_{t-1}(i,j) \oplus \psi_{t-1}(i+1,j+1) \oplus \psi_{t-1}(i+1,j-1) \oplus \\ & \psi_{t-1}(i,j) \oplus \psi_{t-1}(i-2,j) \oplus \psi_{t-1}(i-1,j+1) \oplus \psi_{t-1}(i-1,j-1) \oplus \\ & \psi_{t-1}(i+1,j+1) \oplus \psi_{t-1}(i-1,j+1) \oplus \psi_{t-1}(i,j+2) \oplus \psi_{t-1}(i,j) \oplus \\ & \psi_{t-1}(i+1,j-1) \oplus \psi_{t-1}(i-1,j-1) \oplus \psi_{t-1}(i,j) \oplus \psi_{t-1}(i,j-2)\end{aligned}$$

- 因为有 $a \oplus a = 0$ 和 $a \oplus 0 = a$ ，对上式进行移项合并处理，得到：
- $$\psi_{t+2}(i,j) = \psi_t(i+2,j) \oplus \psi_t(i-2,j) \oplus \psi_{t-1}(i,j+2) \oplus \psi_{t-1}(i,j-2)$$
- 2次迭代后，4个方位的2个格位将初始构型进行转换并进行异或运算。如果是3次迭代，结果就不是这么简单，因为不能相消。



## 非线性物理：元胞自动机

---

- 不难证明，当迭代次数为 $2^n$ 时， $\oplus$ 规则都比较简单。例如：
- $$\psi_t(i,j) = \psi_{t-T}(i+T,j) \oplus \psi_{t-T}(i-T,j) \oplus \psi_{t-T}(i,j+T) \oplus \psi_{t-T}(i,j-T)$$
- 导致 $\oplus$ 规则迭代复杂性的原因在于初始图形经过数量不同的多次转换后叠加形成。因此， $\oplus$ 规则不是自复制元胞自动机，因为这一规则对应的是叠加。



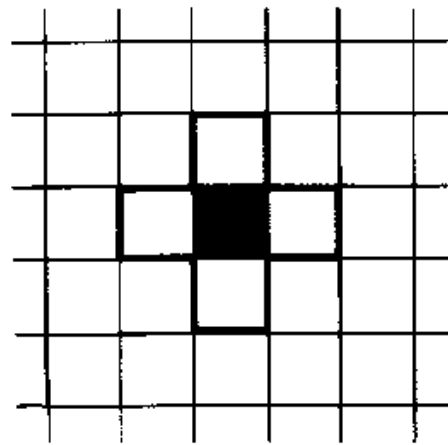
### 定义：

- 元胞自动机：
  - (1) 规整的元胞网格覆盖  $d$  维空间的一部分。
  - (2) 归属于网格的每个格位  $r$  都有一组布尔变量  $\Phi(\mathbf{r},t)=\{\Phi_1(\mathbf{r},t), \Phi_2(\mathbf{r},t), \dots, \Phi_m(\mathbf{r},t)\}$ ，分别给出时间  $t=0,1,2,\dots$  的局部状态。
  - (3) 演化规则  $R=\{R_1, R_2, \dots, R_m\}$  按下列方式指定状态  $\Phi(\mathbf{r},t)$  的时间演化过程： $\Phi_j(\mathbf{r},t+1)=R_j[\Phi(\mathbf{r},t), \Phi(\mathbf{r}+\delta_1,t), \Phi(\mathbf{r}+\delta_2,t), \dots, \Phi(\mathbf{r}+\delta_q,t)]$ 。这里  $\delta_k$  是元胞  $r$  的给定邻居元胞。
  - (4) 演化规则对于所有格位都是同一的，即是所谓同步动力学。

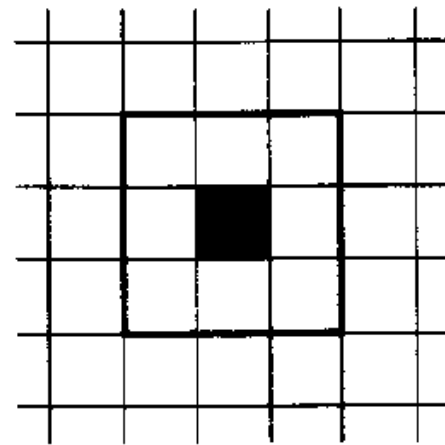


## 非线性物理：元胞自动机

- 邻居：
- (1) 元胞自动机的演化规则是局部的，对指定元胞状态更新只需要知道其近邻元胞状态。
- (2) 某个元胞需在其内搜索的空间域叫邻居。(3) 邻居大小没有限制，但演化规则的复杂性随着元胞大小指数增大，这个很可怕。
- (4) 只介绍两种邻居：**Von Neumann**邻居和**Moore**邻居。



(a)



(b)





## 非线性物理：元胞自动机

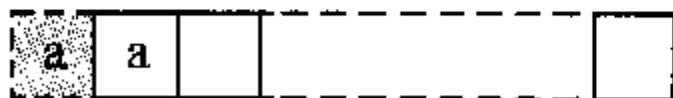
- 边界条件：
- (1) 实际元胞自动机模拟不可能处理无限系统，指定边界条件是必要的。
- (2) 可以对边界元胞赋予不同的演化规则。
- (3) 一般模拟都是指定一些特定边界条件。研究这些边界条件的影响也是很重要的基础性工作。如下为常用的四种。



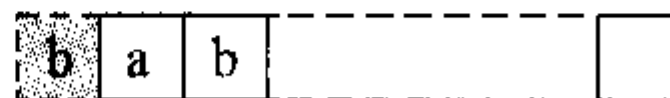
周期边界



固定边界



绝热边界



映射边界



### 物理系统的元胞模拟

- 元胞自动机构造简单，规则也简单，却可以演示很多复杂系统的大部分特征，这种特性一定有其背后的物理原因。
- 为什么简单元胞自动机能够模拟复杂物理系统动力学？
- 元胞自动机提供一个虚拟的微观世界，能够在coarse-grain水平上重现符合一般性规则的物理图像。其优点有：提供非线性动力学系统解析之外的一种方法；没有误差，不存在数据精读问题。
- 两类问题：给定规则模拟物理过程和现象；已知物理过程，寻找某种规则。



## 简单动力系统

- 考虑最简单的元胞自动机：一维、每格位2态、只涉及最近邻。称之为toy model (S. Wolfram规则)。
- 每个元胞( $i$ )在时间  $t$  只可能  $s_i=(0, 1)$ ,  $t+1$ 时  $s_i$  决定于  $(s_{i-1}, s_i, s_{i+1})$ :  
 $s_i(t+1)=\Phi(s_{i-1}(t), s_i(t), s_{i+1}(t))$ 。
- 可能的排列组合方式有:  $\alpha_0=(000), \alpha_1=(001), \alpha_2=(010), \alpha_3=(011), \alpha_4=(100), \alpha_5=(101), \alpha_6=(110), \alpha_7=(111)$ 。
- 对  $t$  时刻每一种组合方式, 可指定  $t+1$  时刻格位( $i$ )的状态为0或1两种规则。对所有组合方式排列:  $\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7=2^8=256$ 。



## 非线性物理：元胞自动机

---

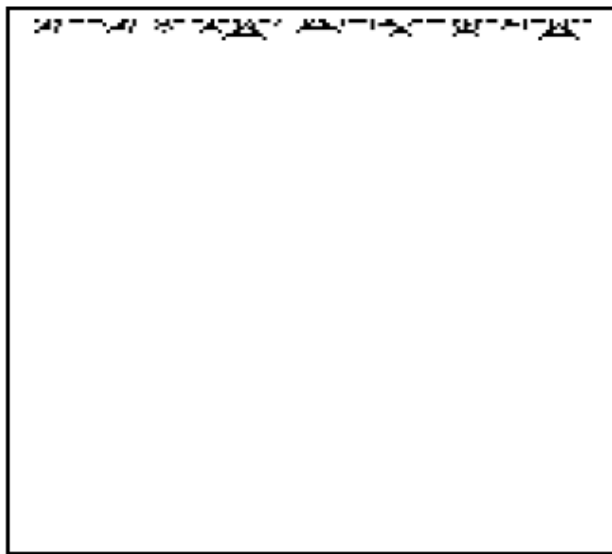
- 对这256种规则进行编号： $N_R = \sum_{(i=0\sim 7)} 2^i \alpha_i$ ，其对应的二进制表示为 $N_R = \alpha_7 \alpha_6 \alpha_5 \alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0$ ，例如 $N_R = 40$ ，对应于00101000，即 $\alpha_7 = 111 \rightarrow 0$ ， $\alpha_6 = 110 \rightarrow 0$ ， $\alpha_5 = 101 \rightarrow 1$ ， $\alpha_4 = 100 \rightarrow 0$ ， $\alpha_3 = 011 \rightarrow 1$ ， $\alpha_2 = 010 \rightarrow 0$ ， $\alpha_1 = 001 \rightarrow 0$ ， $\alpha_0 = 000 \rightarrow 0$ 。
- 给定演化规则和初始状态，就可以研究动力系统演化特征了。假定初始状态一个格位仅一种状态，则根据规则行为特点有如下四类演化行为：
- 类1：有限演化后几乎全部初始状态都演化成单值均匀状态。在 $N$ 很大时，初始构型是零测度的。从动力学演化观点，这对应于相空间的焦点。如 $N_R = 4$ 就是如此(下图a)。



## 非线性物理：元胞自动机

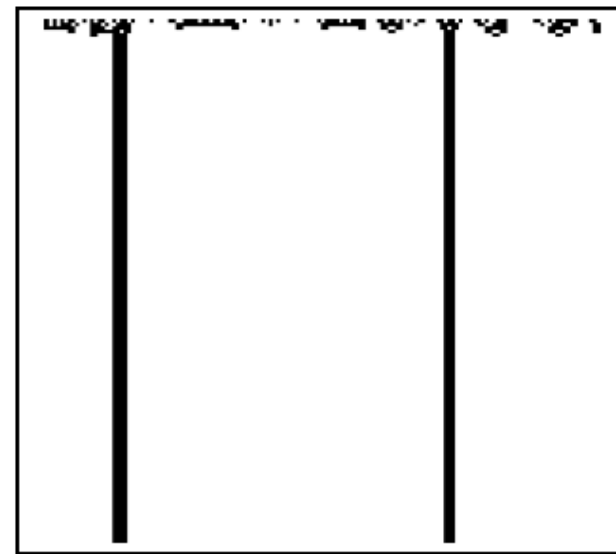
- 类2：几乎全部的初始状态都生成一个由间隔的、周期性的分区图形。规则24就给出了这样的演化图像。
- 这些自动机的演化在相空间中对应动力学系统向极限环的演化。

$N_R=4$



(a)

time  
↓



(b)

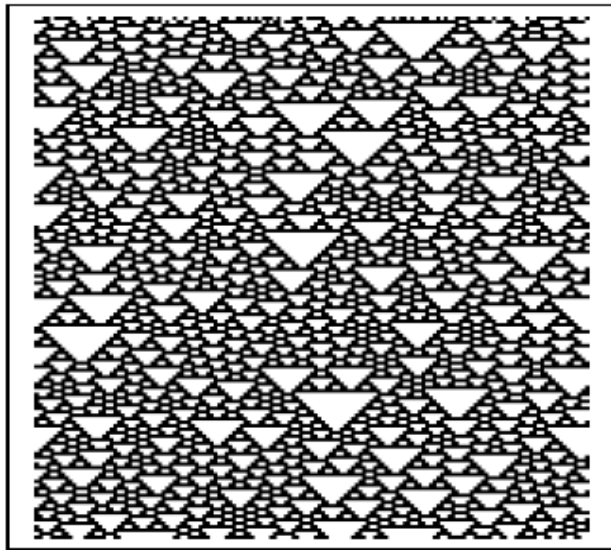
$N_R=24$



## 非线性物理：元胞自动机

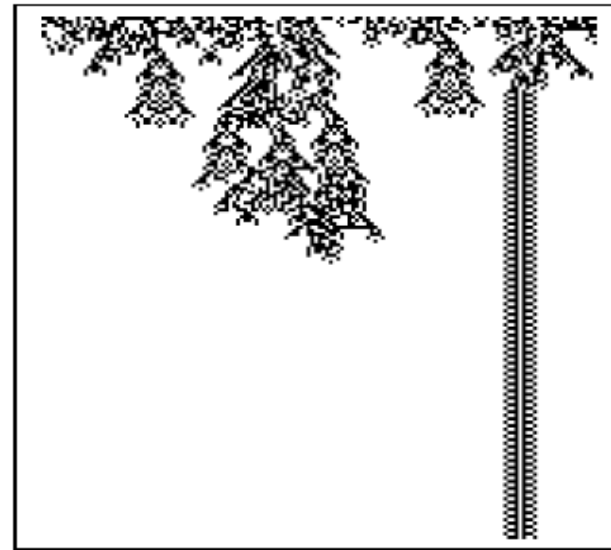
- 类3：几乎全部的初始状态都演化成混沌的、非周期的图形。规则12就给出了这种例子。初始条件的微小变化总是导致后续演化过程的越来越大的不同。这类似于动力学系统向混沌奇异吸引子的演化。

$N_R=12$



(c)

$N_R=20$

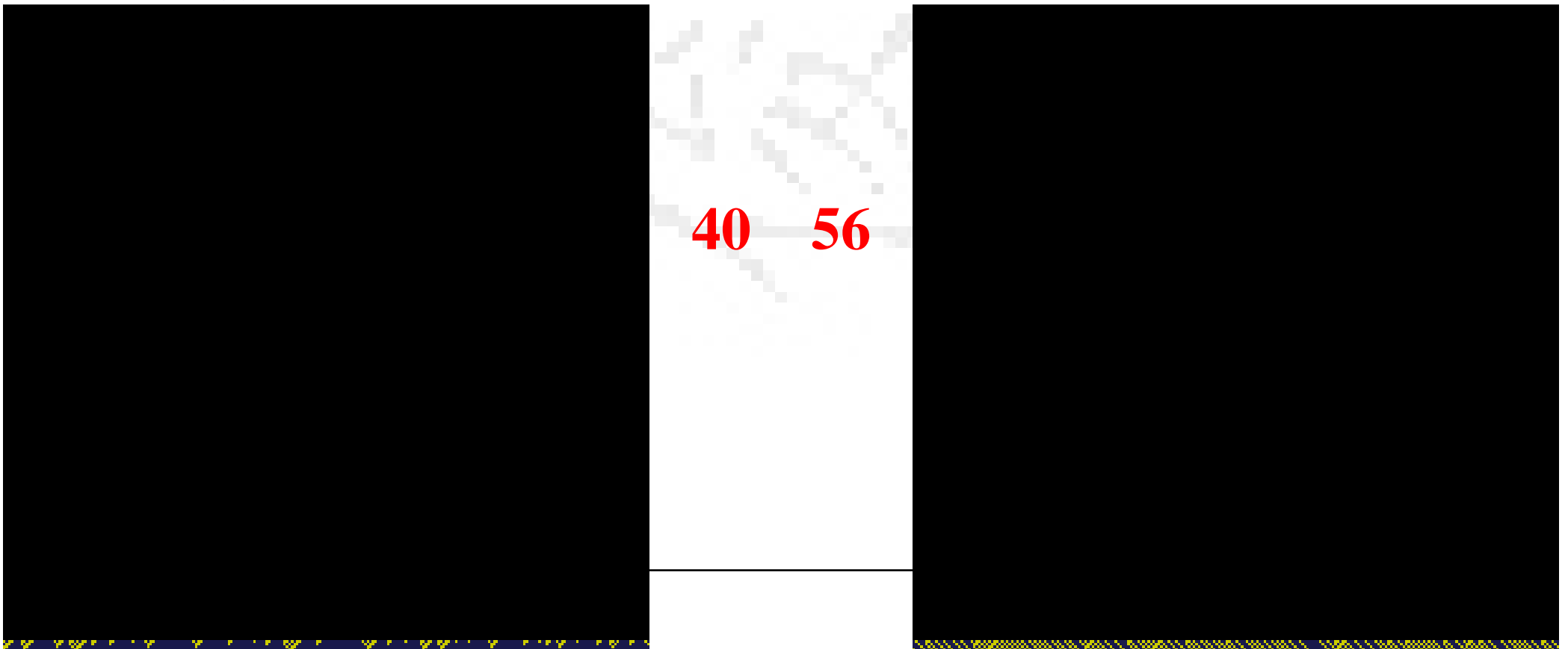


(d)

## 非线性物理：元胞自动机

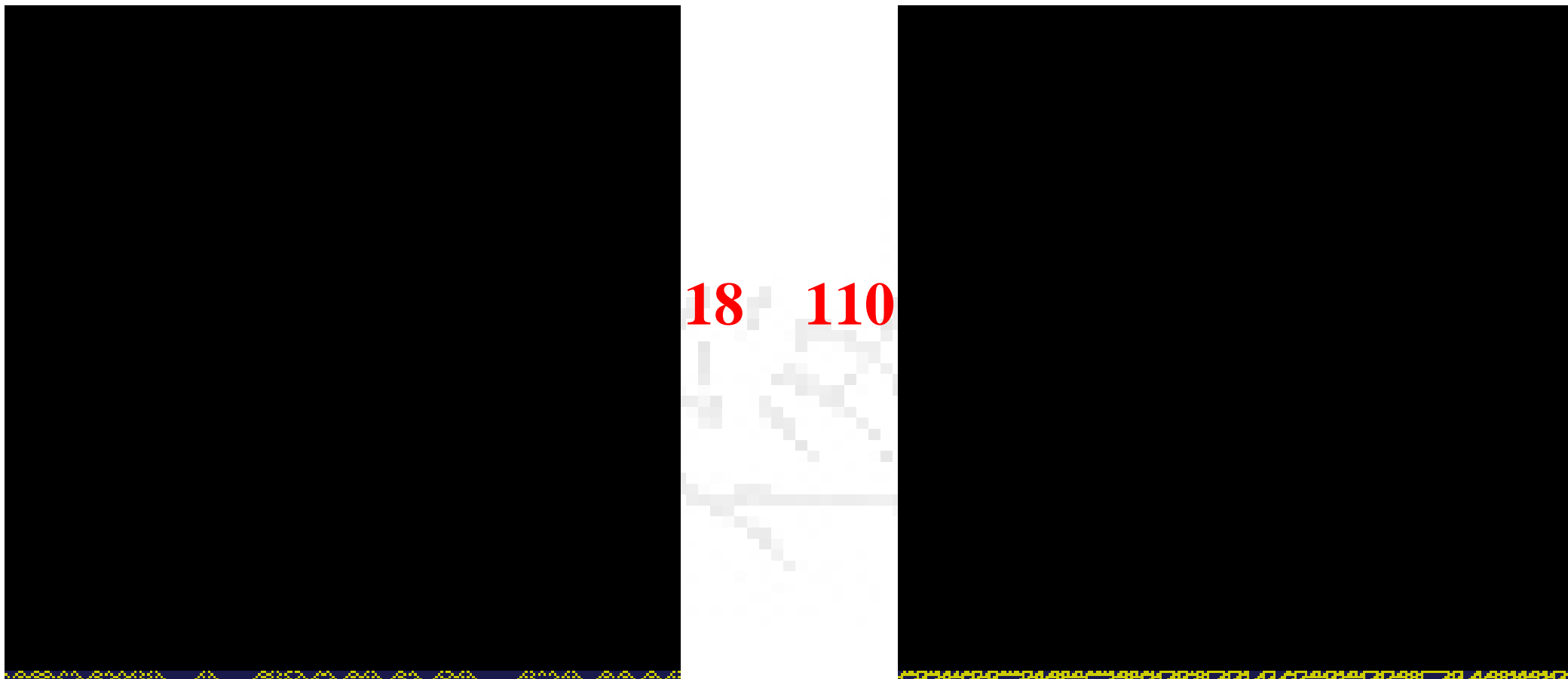
---

- 类4：这类元胞自动机针对不同的初始状态能够生成持续不断的复杂结构，规则20为一个例子。这种动力学演化行为一般由时间过程不同而不同。
- 再看几个例子：



# 非线性物理：元胞自动机

---





## 非线性物理：元胞自动机

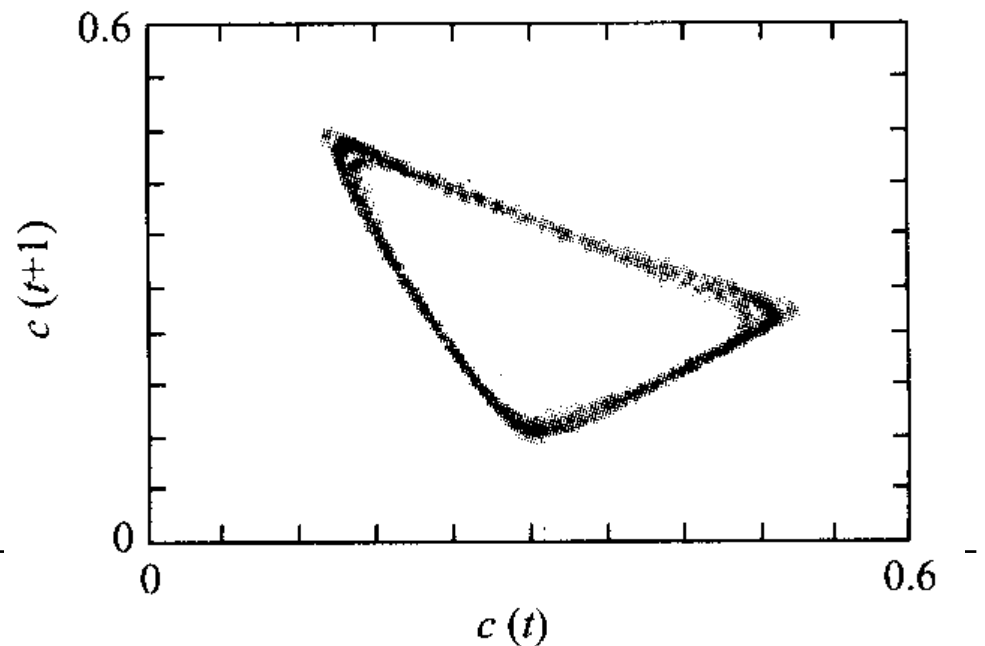
---

- **Wolfram**的toy规则虽然简单，但对应的动力学行为却很复杂。最有意思的是其分类适用于很多更为复杂的规则系统，原因尚不清楚。
- 设每个元胞有 $k$ 种不同状态，决定于 $r$ 个邻居格位，则可能的规则数有 $N_R = k^{k^{(2r-1)}}$ 种。但是所有演化规则产生的图样依然可以划归上述4类。
- 下面的问题是：这些演化规则是否具有某种物理背景？



## 非线性物理：元胞自动机

- **组合行为：**按照前述类似规则和初始条件定义的元胞自动机所表现的演化具有空间组合特征。考虑一个三维晶格模型：
- $s_i(t+1)=1$  if  $\sum_{\text{neighbors+itself}} \in \{0, 5\}$ ;  $s_i(t+1)=0$  if others。即立方晶格的6个近邻加上各位*i*自身=0或5，则 $s_i(t+1)=1$ ，否则 $s_i(t+1)=0$ 。
- 定义密度函数 $c(t)=\sum_{\text{lattice}} s_i(t)/L^2$ ，研究其相空间行为，结果如下：  
:
- 注意：同步演化是必须的。
- **Monte Carlo**不能随使用。



## 非线性物理：元胞自动机

---

- **真实性水平：**元胞自动机虽然构造简单，但是演化行为却很复杂。其演化特征似乎可以反映很多物理系统的大模样。
- 元胞自动机的特点是其演化行为与具体微观细节的关系不大，而更多决定于维度和演化规则，说明物理系统大模样具有一些对称性共性的规律。
- 当然，很难找到一种规律性的东西。这很大程度上说明世界的复杂性。
- 铁磁性是很好的例子：微观上电子自旋分布用量子力学解决，宏观上我们只要知道自旋排列的交互作用就基本够了，用**Ising**模型可以搞定几乎所有宏观性质，虽然**Ising**模型与元胞自动机不同。



## 非线性物理：元胞自动机

---

### 简单系统模拟：表面生长Wolfram规则184。

- 考虑1+1维生长过程，满足弹道(ballistic deposition)沉积机制，Krug和Spohn在PRA 38, 4271 (1988)研究了这一问题。
- 生长表面沿x方向，粒子沿-y方向沉积，导致生长界面沿y方向生长。粒子是否沉积决定于局域表面组态，因此与DLA不同。
- 这种生长的表面形态在空间时间维度空间中是自相似的，具有标度指数。
- 我们研究标度指数对局域生长规则的依赖性。
- Krug和Spohn研究的随机生长模型是这样进行的：



## 非线性物理：元胞自动机

---

- 对一维点阵格点 $i$ 给定其界面高度 $h_i(t)$ ， $h_i(t)$ 随时间 $t$ 变化按**Poisson**过程进行，与邻居无关。
- 所谓**Poisson**过程是给定 $(0,1)$ 内的均匀随机数 $U_j, j=1,2,\dots$ ，则下列随机数列构成满足**Poisson**概率的过程： $R_j=-\ln(1-U_j)/r$ ，这里 $r$  (通常 $r=1$ )是速率常数。
- 界面生长问题中，**Poisson**生长是指 $i$ 格点相邻两次生长时间间隔为 $R_j$ 。
- 模拟显示界面空间无关，平均高度 $h(t)\sim t$ ，界面宽度 $\Delta h(t)=w\sim t^{1/2}$ 。
- 如生长过程引入某种界面空间弛豫，即表面扩散，则：



## 非线性物理：元胞自动机

---

$$w(L, t) = L^\zeta f(t/L^z),$$

- $L$ 界面长度， $\zeta, z$ 为标度指数， $f(x)$ 为标度函数， $f(x \rightarrow \infty) = 0, f(x \rightarrow 0) \sim x^{\zeta z}$ 。也就是说界面空间相关了。
- 对生长过程的线性化理论好像与模拟结果不吻合，原因在于实际生长存在非线性，这导致著名的Kardar、Parisi、Zhang方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) = c + D \Delta h(x, t) + \lambda [\nabla h(x, t)]^2 + \eta(x, t)$$

- $c$ 是线性生长速率， $\eta$ 是白噪声：

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = \sigma^2 \delta(x - x') \delta(t - t')$$



## 非线性物理：元胞自动机

---

- 如果将坐标建立在以速率 $c$ 运动的界面上，则 $c=0$ ， $D\Delta h$ 描述了生长界面的扩散弛豫， $\lambda$ 是非线性强度，与 $c$ 成比例， $\nabla h$ 是表面梯度项，由带白噪声的**Burgers**方程决定。
- 如果 $\lambda=0$ ，则回复到**Edward-Wilkinson**方程； $\lambda=0$ ， $D=0$ 就对应上述随机生长模型。
- 关于含有非线性的界面生长理论是非线性物理的一个重要方面。**KPZ**方程很著名，我们要做的事情是从元胞自动机角度找到一组生长规则来重现**KPZ**方程。
- 先来看简单的标度理论。



## 非线性物理：元胞自动机

---

- 假定一个具有随机生长和确定生长规则共存的生长界面，沿着界面方向存在特征长度 $\xi_{\parallel}$ ，沿着垂直界面方向特征长度 $\xi_{\perp}$ ，标度假定针对两个问题：

- (1)  $\xi_{\perp}$ 与 $\xi_{\parallel}$ 之间有何关系？如果表面是标度不变的，则一定有下列静态表面性质 ( $\zeta$ 为表面静态粗糙指数)：

$$\xi_{\perp} \sim \xi_{\parallel}^{\zeta} \quad 0 \leq \zeta < 1$$

- (2) 一表面涨落需要多长时间能够传播 $\xi_{\parallel}$ 距离( $z$ 为动力学指数)：

$$\tau \sim \xi_{\parallel}^z$$

- 先考虑确定性表面生长对随机初始界面的依赖关系。**KPZ**方程为





## 非线性物理：元胞自动机

---

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D \nabla^2 h + \lambda |\nabla h|^\beta \quad \beta \geq 1$$

- 假定初始界面的随机性满足下述标度：

$$\langle |h(x) - h(x')| \rangle \sim |x - x'|^{\bar{\xi}} \quad 0 \leq \bar{\xi} < 1$$

- 因为KPZ方程是确定性的，没有噪声，因此界面在生长过程中只是不断地弛豫而平整化，因此，长时间生长的界面形态一定是与初始界面形态自相似的：

$$\xi = \bar{\xi}$$

- 证明这一点不难，不失一般性，设 $\lambda=0$ ，则：



## 非线性物理：元胞自动机

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D \nabla^2 h \quad | \hat{h}(q, t) |^2 = | \hat{h}(q, 0) |^2 e^{-2Dq^2 t}$$

- $q$ 是表面波波矢。可见长时间界面涨落决定于初始界面形态，并且最终完全平整化。
- 下面考虑界面弛豫关联长度 $\xi(t)$ ，它表示经过时间 $t$ 后沿界面方向 $\xi$ 范围内的涨落可以消失。考虑：

$$\tau \sim \xi_{\parallel}^2 \quad \xi \sim t^{1/2}$$

- 还可以定义一些其它参数来表征界面弛豫过程。例如界面台阶密度( $\langle \rangle$ 在这里代表对不同初始界面的平均)：

$$\rho(t) := \frac{1}{L^{d-1}} \int d^{d-1}x \langle | \nabla h(x, t) | \rangle$$



## 非线性物理：元胞自动机

- 很显然，台阶组成了界面涨落，因此平均来看，界面斜率应该正比于 $(\xi_{\perp}/\xi_{\parallel})$ ，所以 $\rho \sim (\xi_{\perp}/\xi_{\parallel})$ ：

$$\xi_{\perp} \sim \xi_{\parallel}^{\xi} \quad \xi \sim t^{1/z} \quad \rho(t) \sim \xi_{\parallel}^{\xi-1} \sim t^{-(1-\xi)/z}$$

- 另外一个参量是积累到时间 $t$ 时单位界面尺度上沉积的质量：

$$m(t) = \frac{1}{L^{d-1}} \int d^{d-1}x \langle h(x,t) - h(x,0) \rangle$$

- 再看KPZ方程， $(D\nabla^2 h)$ 对沉积通量无贡献，只引起驰豫；而 $|\nabla h|$ 正是界面斜率，所以 $\rho \sim |\nabla h|$ ，故 $(dh/dt) \sim (dm/dt) \sim \rho^{\beta}$ ，故：

$$m(t) \sim t^{1 - [\beta(1-\xi)]/z}$$



## 非线性物理：元胞自动机

---

- 已经说明，没有随机项，除非非线性特别强，否则( $D\nabla^2 h$ )最终导致界面平整化而停止生长。如果标度假设成立，界面整体弛豫时间  $T \sim L^z$ ，因此  $m(t)$  最终趋向饱和值  $m_{max}$ ：

$$m_{max} \sim T^{1 - [\beta(1 - \xi)]/z} \sim L^{z - \beta(1 - \xi)}$$

- 我们还没有到达终点。确定性界面生长过程实质上就是填充过程，大体上  $h(x)$  中的 **minima** 有机会被填充，而平界面区域则是保持不生长。因此，最大质量  $m_{max}$  应该与初始界面的最大高度是一个

数量级： $\langle |h(x) - h(x')| \rangle \sim |x - x'|^\xi \quad \xi = \bar{\xi}$

$$m_{max} \sim L^\xi$$



## 非线性物理：元胞自动机

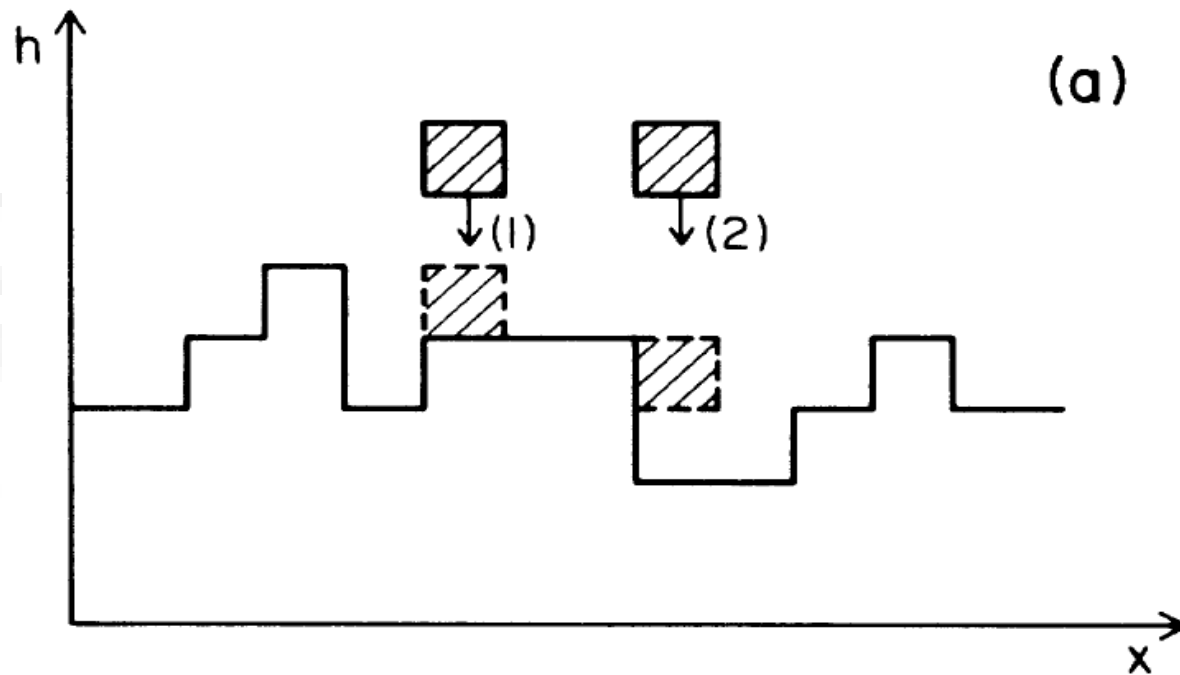
---

- 搞定了：
$$z = \zeta(1 - \beta) + \beta$$
- 这一标度关系与维度无关。 $\beta=1$ 时 $z=1$ 。 $\zeta(1-\beta)+\beta>2$ ，则 $z>2$ ，表示表面驰豫(扩散)超越非线性导致的非平衡效应，因此界面最终趋于平整化。也就是说非线性指数  $\beta \geq (2-\zeta)/(1-\zeta)$  的非线性过程不会影响最终的界面形态。
- 对于确定性KPZ方程， $\beta=2$ ，所以 $z=2-\zeta$ ，这是众所周知的结果。
- 下面的讨论只针对 $\zeta=1/2$ ，因为这表示初始界面是随机选取的，也为很多模型模拟所证实。此时， $z=(1+\beta)/2$ 。
- 说了半天，现在来引入元胞自动机问题。



## 非线性物理：元胞自动机

- 我们希望建立一个元胞自动机规则，能够模拟具有非线性的KPZ方程。为了简化，假定 $d=2$ ， $\beta=1$ 。构建的生长模型如下：



- 定义沉积速率 $\Gamma_{top}$ 和 $\Gamma_{side}$ ，分别表示过程1和2，这样定义也可以考虑蒸发过程。



## 非线性物理：元胞自动机

---

- 设 $p = \Gamma_{top} / \Gamma_{side}$ ， $p \rightarrow \infty$ 对应随机生长， $p \rightarrow 0$ 对应台阶生长。平界面就无法生长了。具有有限台阶的界面生长进行到所有台阶消失，从而停止生长。
- 搞定了局域演化规则，下面要讨论自动机的**updating**步骤了。既然是完全确定性的**KPZ**方程，就可以通过**并联updating**而不是**串联updating**。注意到许多生长模型中的**串联updating**是生长界面大尺度涨落的来源，如**DLA**。而**并联updating**不产生**noise**。
- 并联规则就可以写成：

$$h_i(t + 1) = \max(h_{i-1}(t), h_i(t), h_{i+1}(t)) , i = 1, \dots, L$$



## 非线性物理：元胞自动机

---

- 注意到，定义：

$$h_{L+1}(t) = h_1(t) \quad \sigma_i(t) = h_{i+1}(t) - h_i(t)$$

- 初始界面定义满足： $\sigma_i(0) = \pm 1$ ，随机选取，且满足L为偶数和：

$$\sum_{i=1}^L \sigma_i(0) = 0$$

- 这样的定义等效于沿h-axis方向的对称随机行走，在第L步刚好回到原始位置。且相对平均高度的界面涨落均方差为 $w(L)^2 = L/12$ 。

所以，立即得出静态指数 $\zeta = 1/2$ 。

- 指数z也可以确定出来。因为有：
$$\rho(t) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |\sigma_i(t)|$$





## 非线性物理：元胞自动机

---

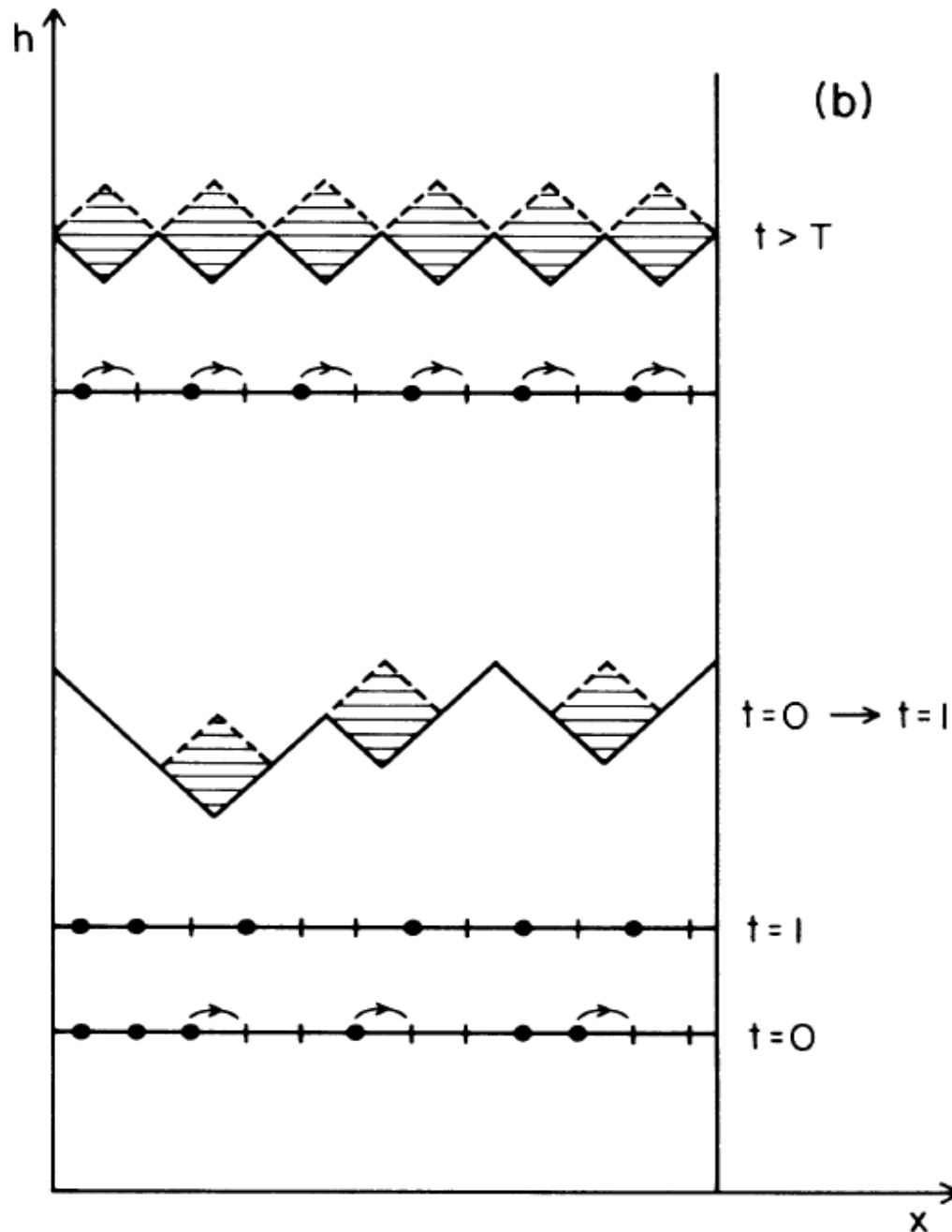
- 所以：  $m(t) = \int_0^t ds \rho(s)$
- 而注意到  $(dm/dt) \sim \rho^\beta$ ，所以有  $\beta=1$ ，即  $z=1$ 。
- 下面将

$$h_i(t+1) = \max(h_{i-1}(t), h_i(t), h_{i+1}(t)), i = 1, \dots, L$$

- 与元胞自动机联系起来。上述规则实际上定义了只有那些表面的 **minima** 位置才能生长。如果生长界面是一个一维(1D)取向表面，则生长过程将很有意思。
- 按照上述规则，只有 **minima** 位置生长的进程如下图所示。



## 非线性物理：元胞自动机



- 可以看到，生长过程对应所有下一步生长位置向右移动，除非最右边位置已被占据。也可以视为全部向左移动。
- 全部向右移动就是Walfram提出的规则中的184规则。
- $184 = 128 + 32 + 16 + 8 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 = 10111000$ ，即 $111 \rightarrow 1$ ， $101 \rightarrow 1$ ， $100 \rightarrow 1$ ， $011 \rightarrow 1$ ，其它演化为0。

## 非线性物理：元胞自动机

---

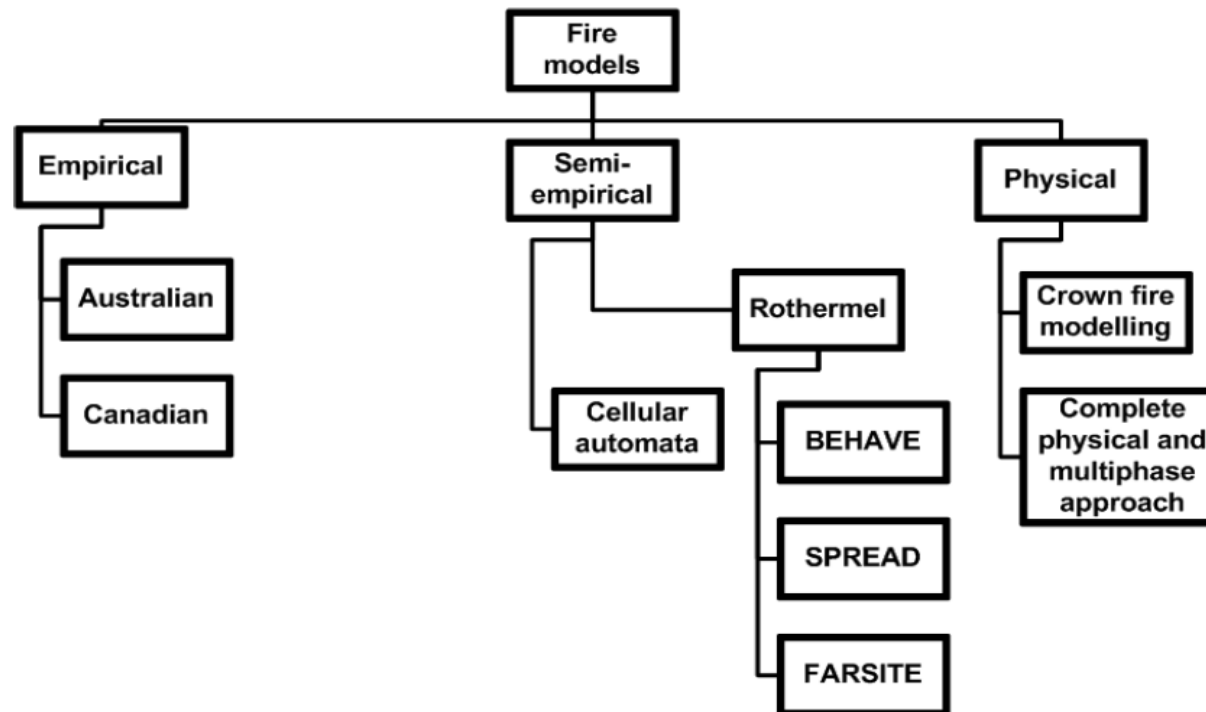
- 上述过程给出了元胞自动机规则对于实际表面生长过程的应用，非常漂亮的一个例子。
- 关于界面生长的标度问题，仍然有很多工作可以进行。元胞自动机并行**updating**作为一个表面扩散占主导的步骤显示了这一模拟方法的巨大应用前景。



## 非线性物理：元胞自动机

简单系统模拟：概率规则应用于火灾预测。

- 概率规则是元胞自动机研究的一个推广，在诸如森林火灾演化研究中很有价值。
- 类似的规则根据需要进行概率设计。描述森林火灾的模型很多：



## 非线性物理：元胞自动机

---

- 图像内容取自：

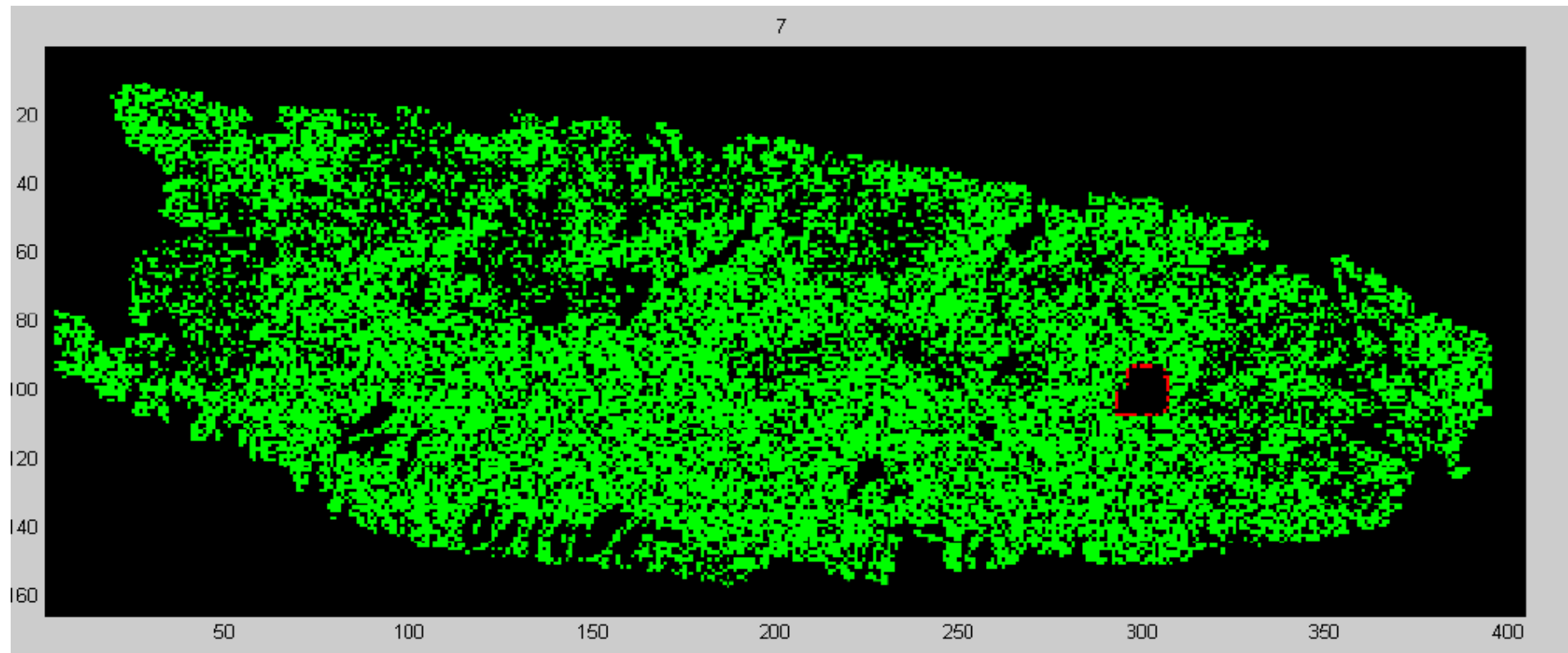
Ljiljana Bodrožić, Darko Stipaničev, Marijo Šerić

- 针对一个二维网格，给定一定的树木分布，则燃烧规则如下：
- (1) 正在燃烧的树变成空位，
- (2) 如果树格位有一个近邻在燃烧，则它变成燃烧树。
- (3) 空位以概率 $p$ 生长树，
- (4) 如果格位树最近邻没有树燃烧，它按概率 $f$ 被闪电击中燃烧。
- 下面是简化规则下模拟的克罗地亚Brac岛的火灾演化情况。具体细节就不交待了。



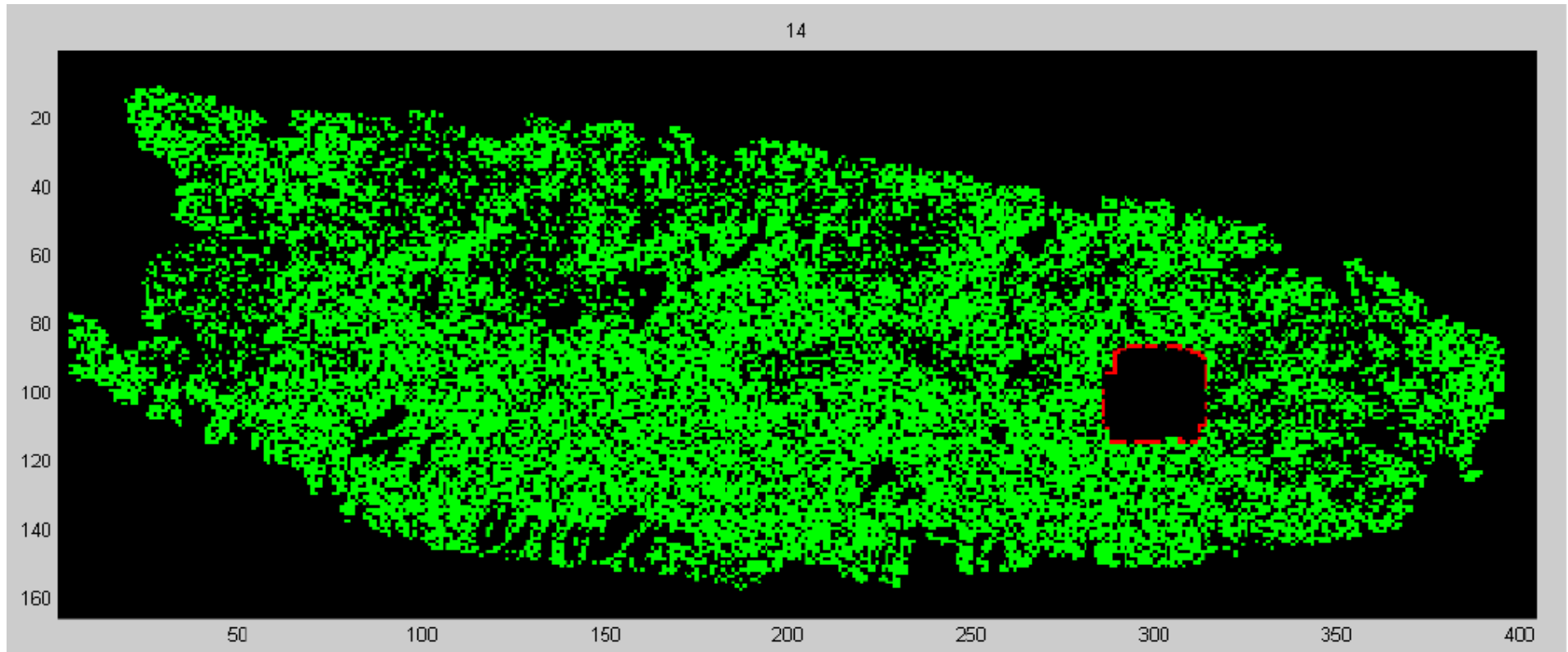
## 非线性物理：元胞自动机

- 无风情况， $t=7$ :



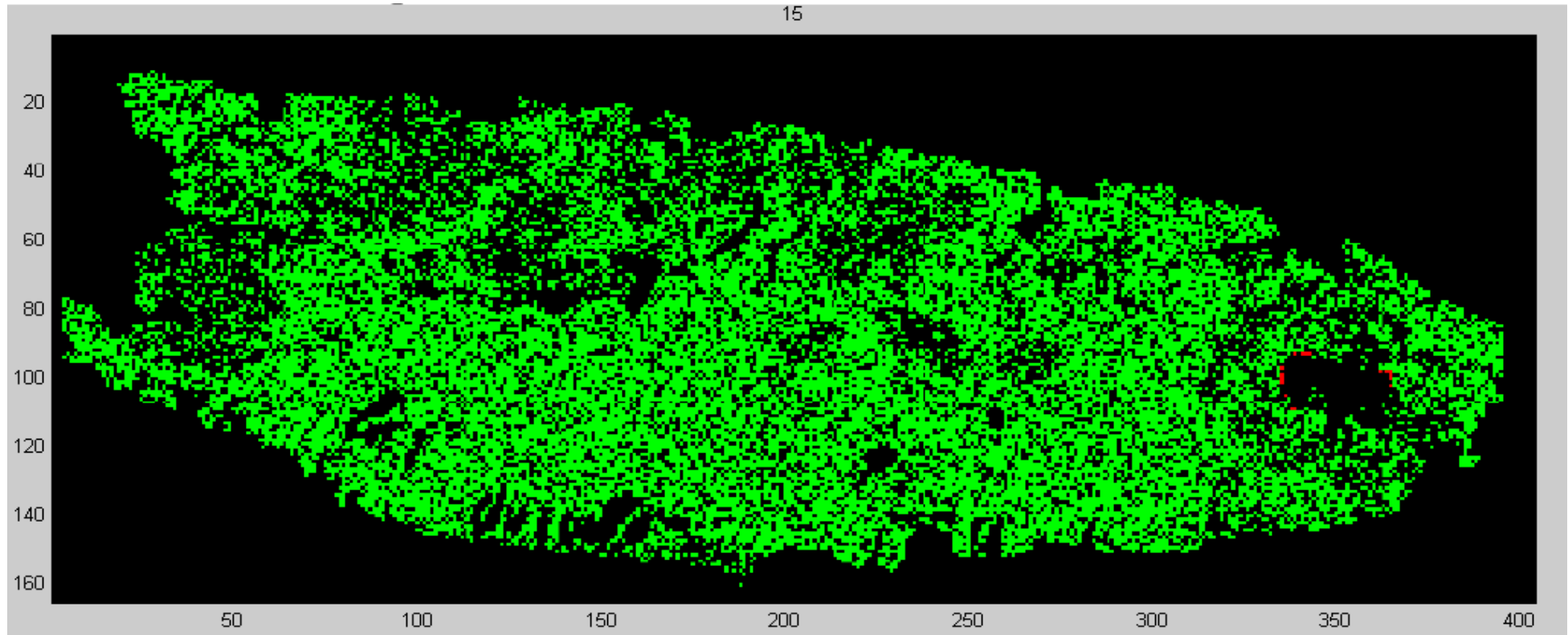
# 非线性物理：元胞自动机

- 无风情况， $t=14$ :



## 非线性物理：元胞自动机

- 无风情况，低密度森林情况， $t=15$ :

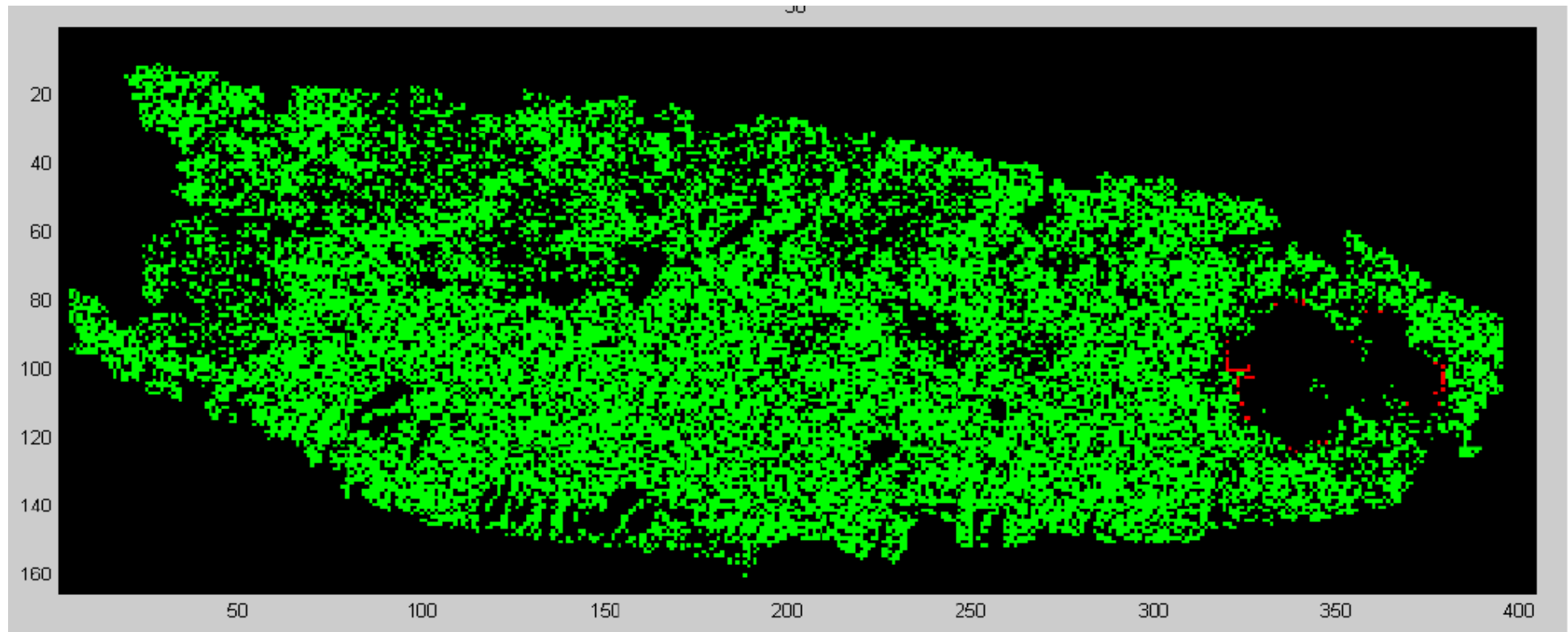




## 非线性物理：元胞自动机

---

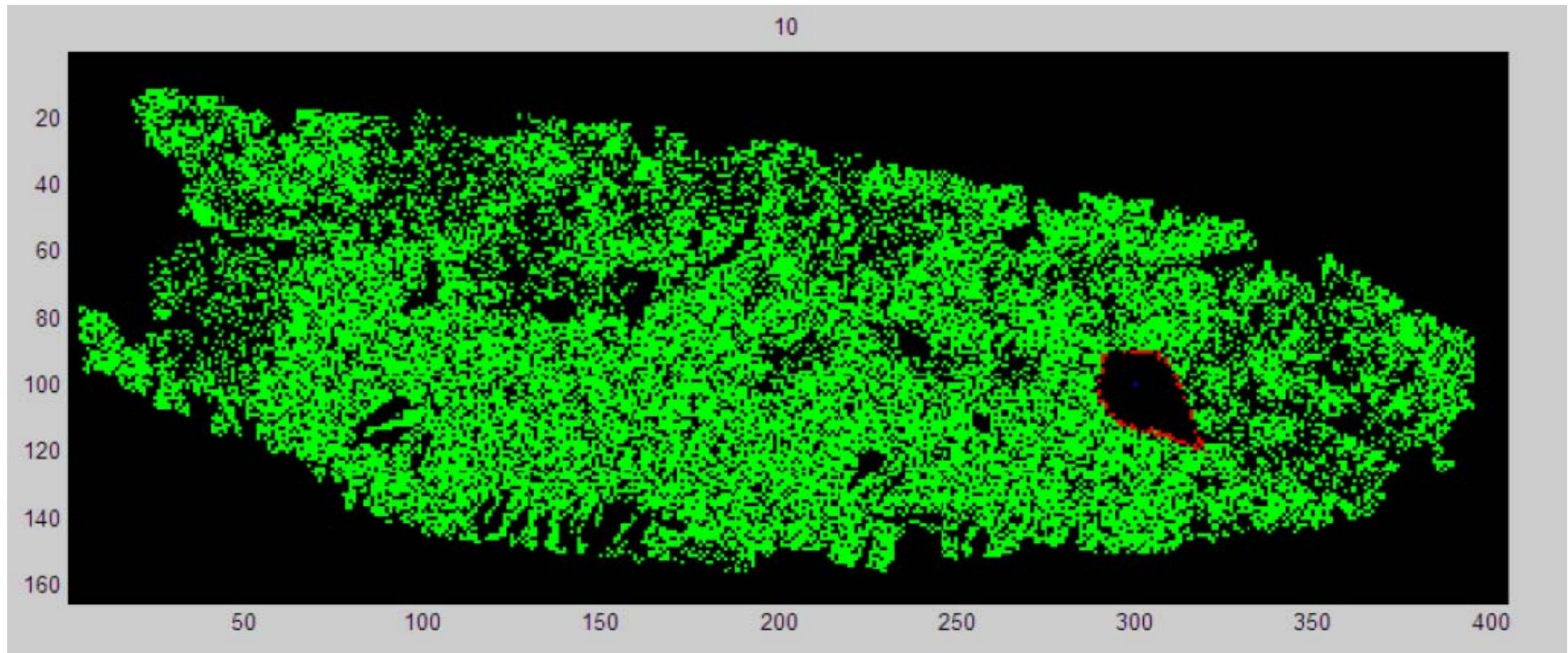
- 无风情况，低密度森林情况， $t=30$ :



## 非线性物理：元胞自动机

---

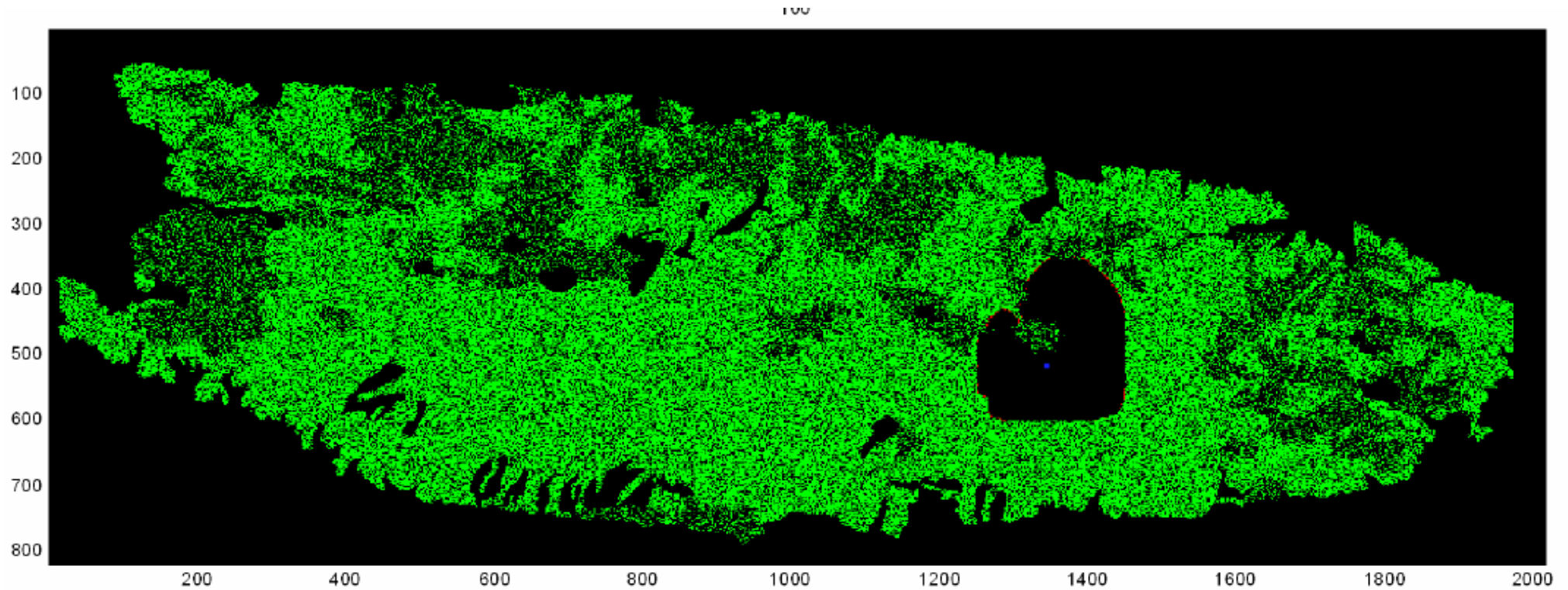
- 东南风情况， $t=10$ :



## 非线性物理：元胞自动机

---

- 更高分辨率情况，蓝色点为初始火点：



## 非线性物理：元胞自动机

---

- 不同的分布下模拟结果：亮色为正在燃烧的树，黑色为空地  
 $p=0.3$  and  $f=0.000006$

