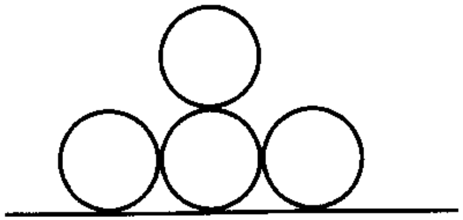
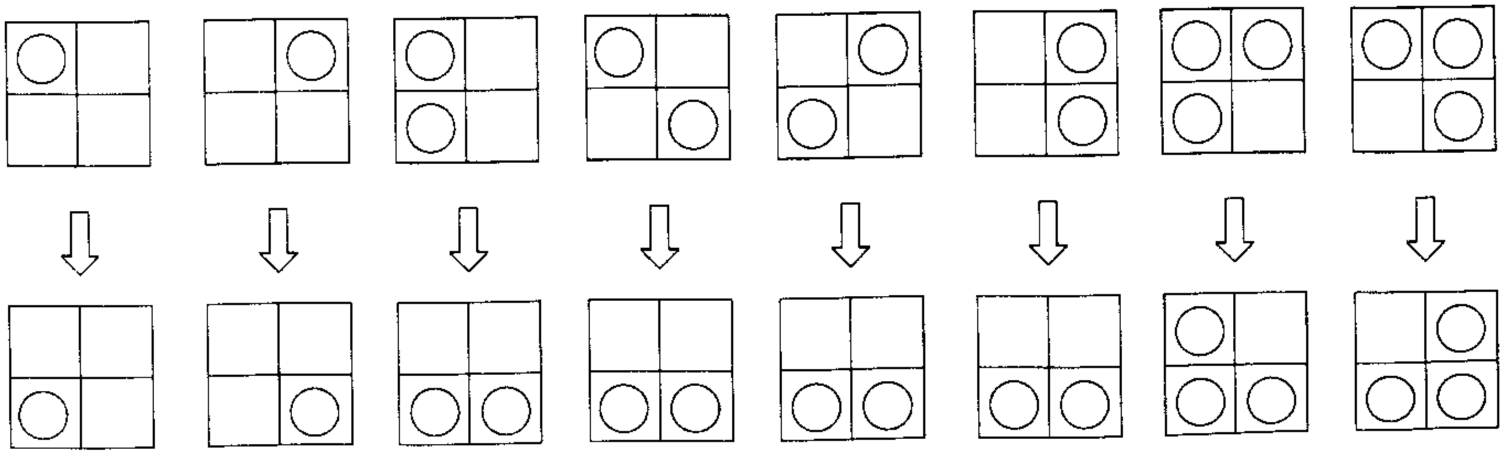
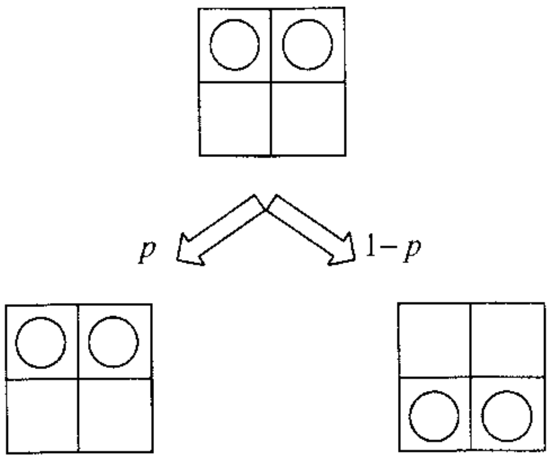
简单系统模拟：砂堆规则

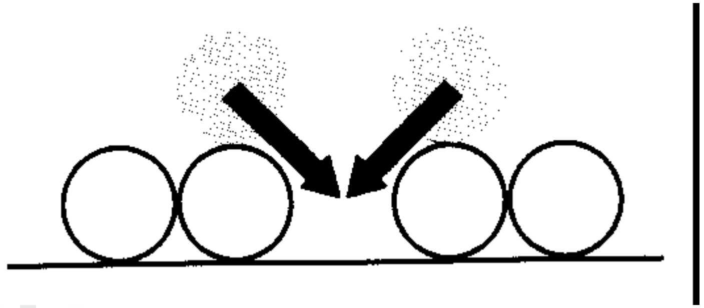
- 应颗粒物质研究的重要性而诞生。可以用简单的元胞自动机进行处理，却能够漂亮地显示实际砂堆坍塌过程。
- 针对正方网格，根据微观规则进行模拟。一般情况下，借助**Moore**八邻居规则足够，运动冲突情况下使用**Margolus**规则。





非线性物理：元胞自动机





- 可见，砂堆规则分成确定性规则和概率规则两类，需要对实际微观事件进行仔细考虑。

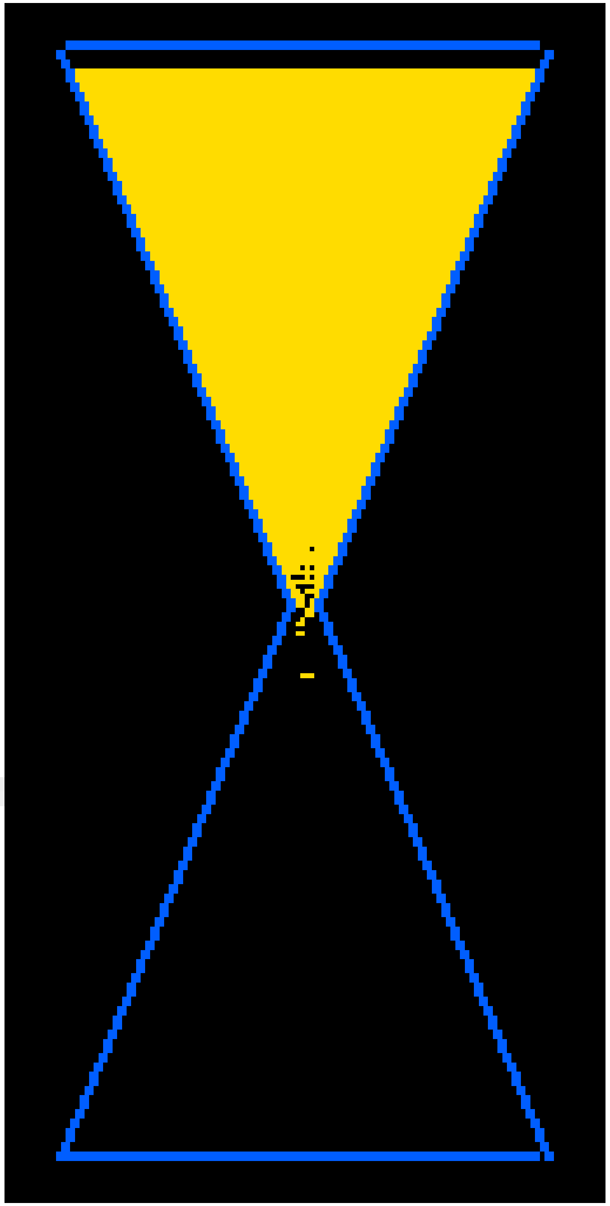
- 假定不出现上述右侧的阻塞行为，砂堆过程可以进行数学处理。假定同步更新前后状态，则**(up-low-left-right)**：

- $s_{ul}(t+1)=s_{ul}s_{ll}[s_{lr}+(1-s_{lr})s_{ur}]$

- $s_{ul}(t+1)=s_{ul}s_{ll}[s_{lr}+(1-s_{lr})s_{ur}]$
- $s_{ur}(t+1)=s_{ur}s_{lr}[s_{ll}+(1-s_{ll})s_{ul}]$
- $s_{ll}(t+1)=s_{ll}+(1-s_{ll})[s_{ul}+(1-s_{ur})s_{ur}s_{lr}]$
- $s_{lr}(t+1)=s_{lr}+(1-s_{lr})[s_{ur}+(1-s_{ul})s_{ul}s_{ll}]$
- 上述演化过程粒子是守恒的：
- $s_{ul}(t+1)+s_{ur}(t+1)+s_{ll}(t+1)+s_{lr}(t+1)=s_{ul}+s_{ur}+s_{ll}+s_{lr}$
- 实际过程总有一个基础地面，位于其上的砂粒保持静止。以$g=1$表示地面，其它位置$g=0$。则：

非线性物理：元胞自动机

- $s_{ul}(t+1)=g_{ul}s_{ul}+(1-g_{ul})s_{ul}s_{ll}[s_{lr}+(1-s_{lr})s_{ur}]$
- $s_{ur}(t+1)=g_{ur}s_{ur}+(1-g_{ur})s_{ur}s_{lr}[s_{ll}+(1-s_{ll})s_{ul}]$
- $s_{ll}(t+1)=s_{ll}+(1-s_{ll})[s_{ul}(1-g_{ul})+(1-s_{ur})s_{ur}(1-g_{ur})s_{lr}]$
- $s_{lr}(t+1)=s_{lr}+(1-s_{lr})[s_{ur}(1-g_{ur})+(1-s_{ul})s_{ul}(1-g_{ul})s_{ll}]$
- 按照上述规则模拟，得到：
- 更为实际的模拟只要通过摸索砂堆规则就可以做到。这里不再啰嗦。

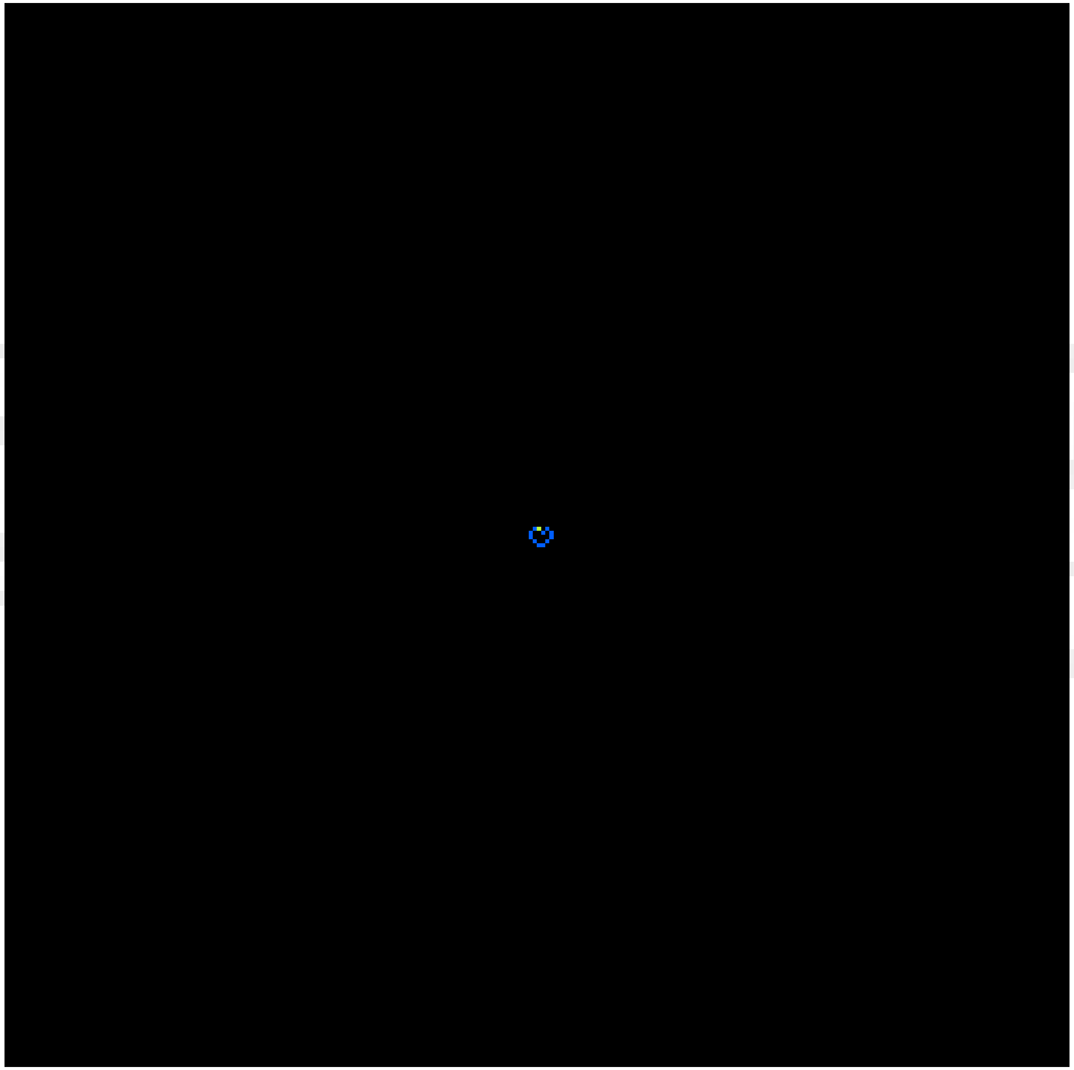


简单系统模拟：蚂蚁规则

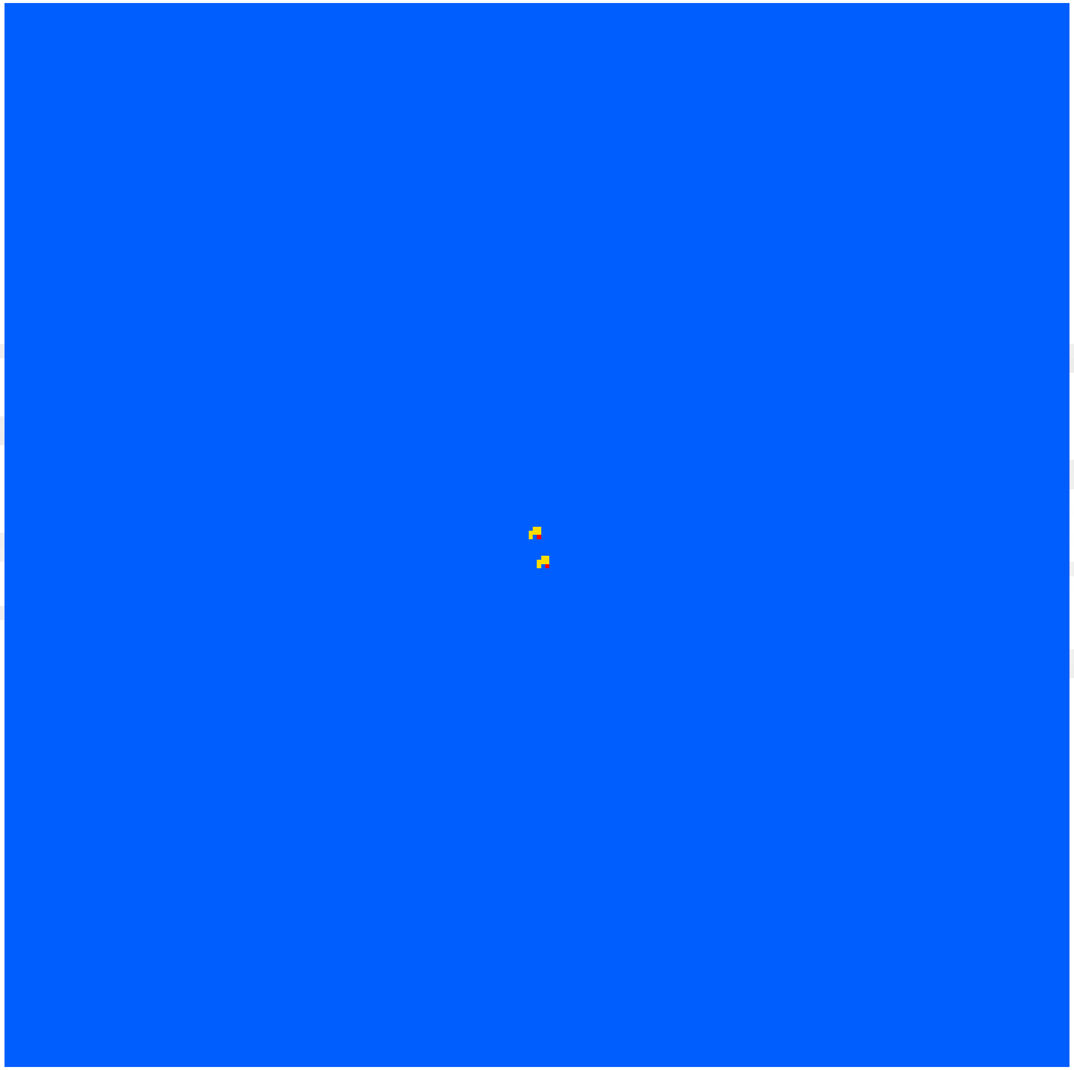
- 蚂蚁规则是**Langton**等提出的，并非针对真正的蚂蚁运动，只是作为一个例子显示简单规则如何导致复杂性。
- 基本规则如下：蚂蚁在网格上运动，格位为**0**或者**1**，如果运动遇到**0**则左转**90**度并将该格位改成**1**；如果遇到**1**则右转并将格位改成**0**。初始网格全白。看看，多简单的规则。
- 运动规则经历了初始过渡后进入混沌，然后突然进入一种有序道路上，规规矩矩地走路了。
- 结论：有微观规则，未必能解释宏观行为。规则重要但不完备。

非线性物理：元胞自动机

- 单个蚂蚁：

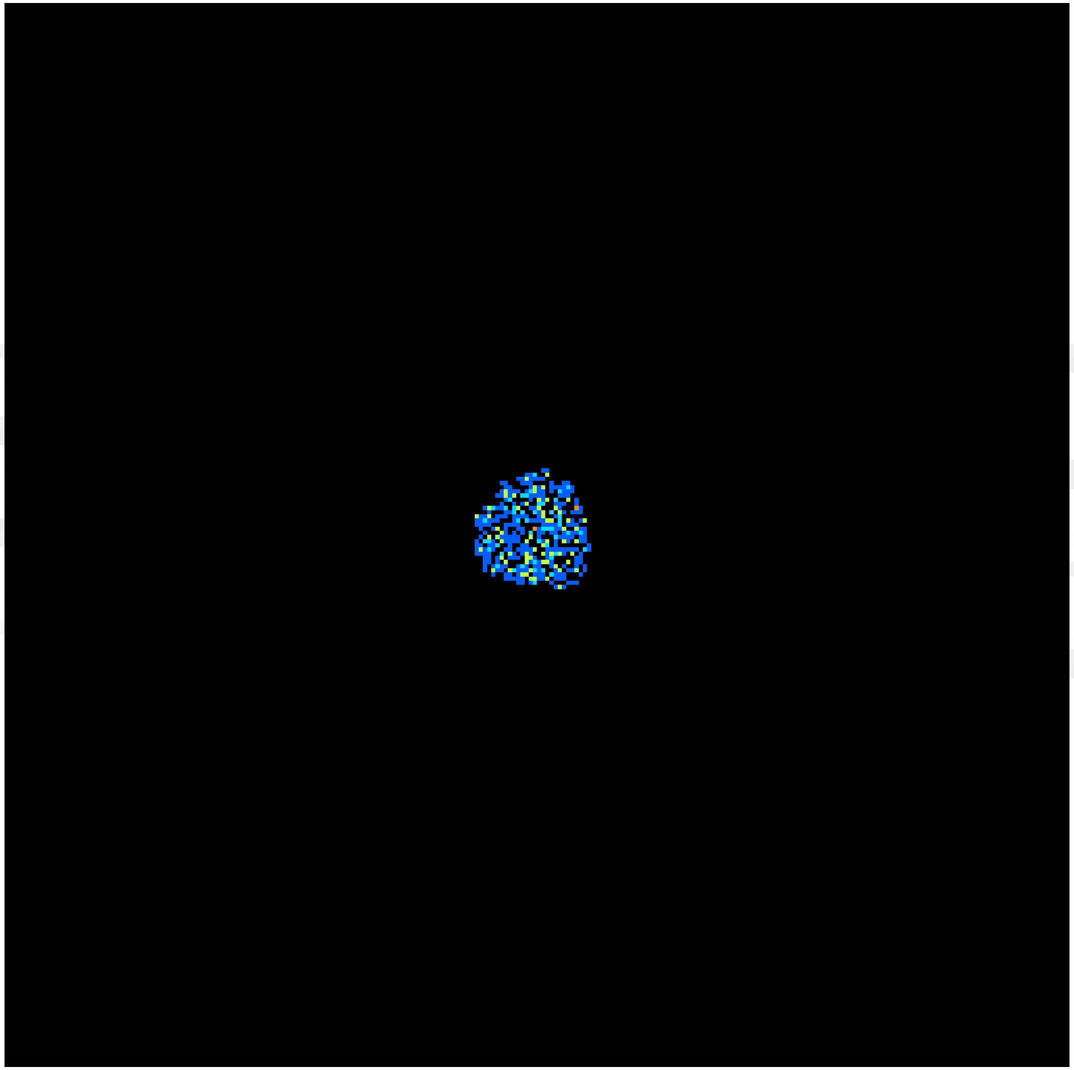


- 两个蚂蚁：



非线性物理：元胞自动机

- 多个蚂蚁：

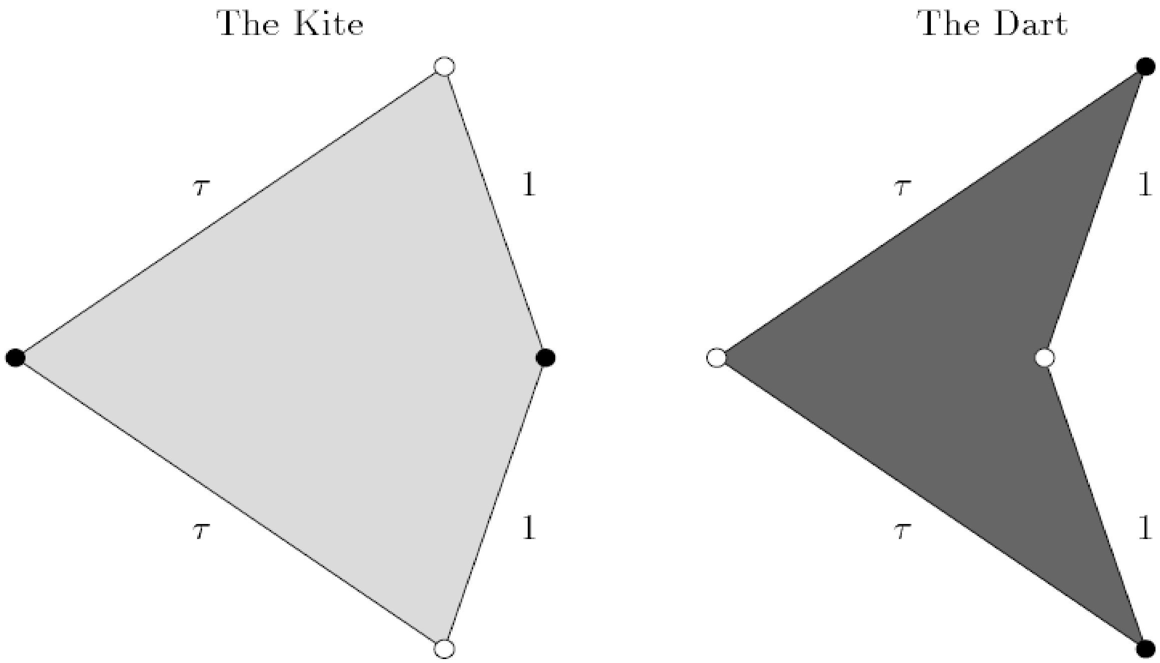


简单系统模拟：Penrose拼盘三色问题

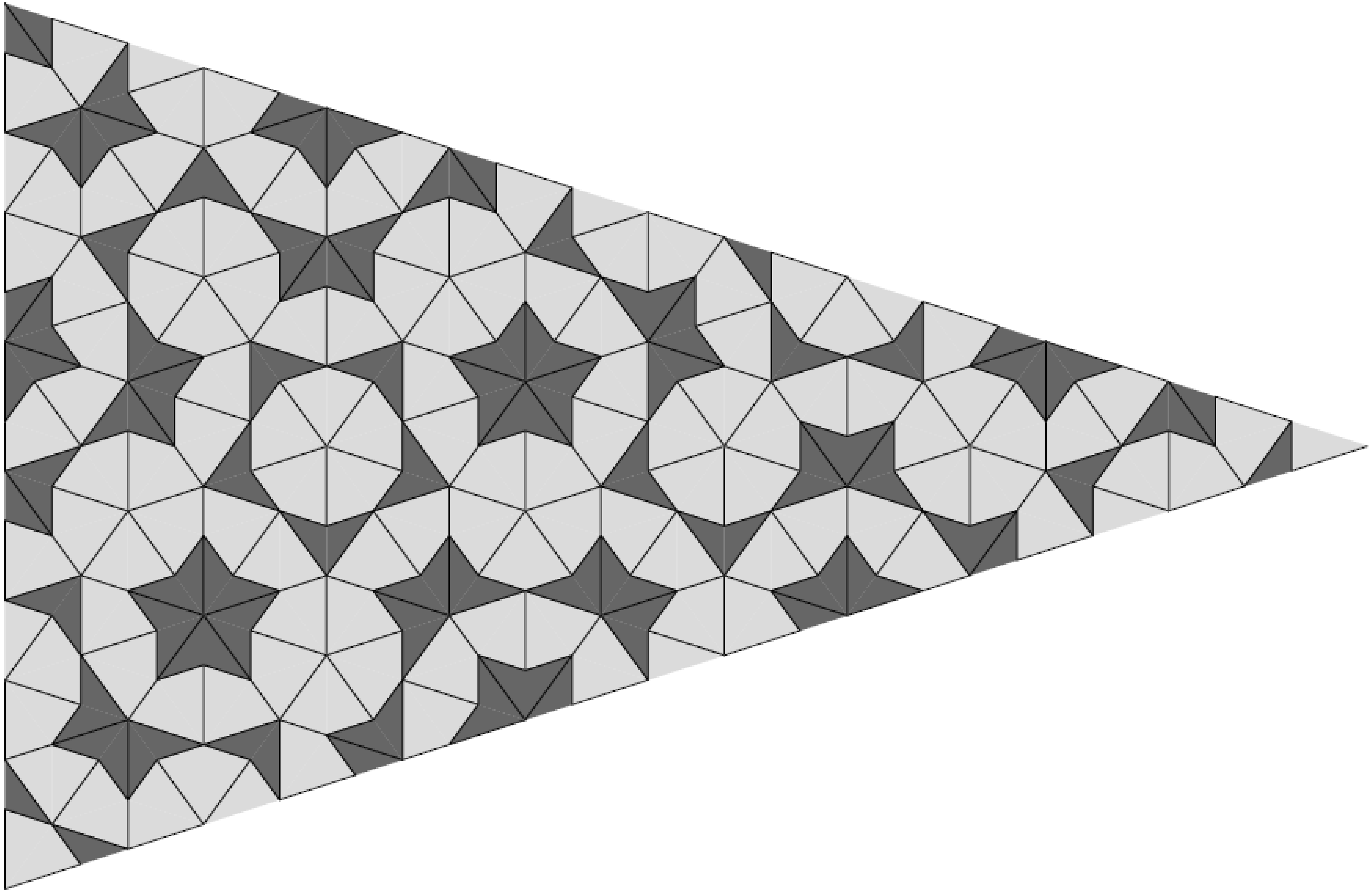
- **Penrose**拼盘问题是纯数学几何问题，但是对于解释准晶现象做出了重大贡献。
- **Penrose**拼盘填满的图形一定是非周期的，即不满足平移对称性等周期对称操作。
- 需要解决的问题是如何用三种颜色为三类**Penrose**拼盘着色，使得每一种颜色都各自分开，不能通过线边相邻，但是点接触可以。
- **Penrose**拼盘有三类。

From Mark McClure

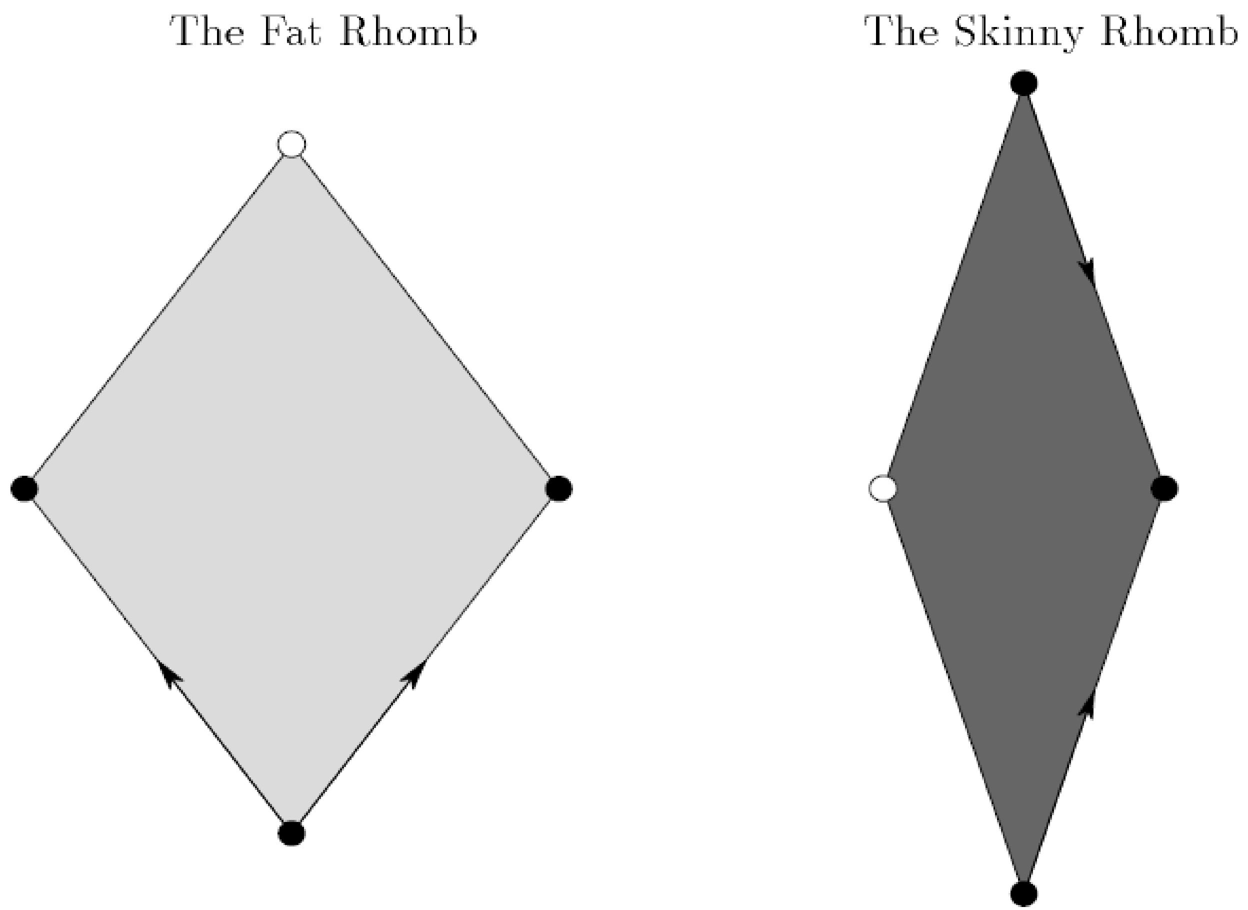
- 一类是**kites and darts**，其中τ是黄金分割数，因此每个夹角都是π/5的整数倍。拼接时要求**Kite**与**Kite**相接，**Dart**与**Dart**相接，而且每每要同边相接。



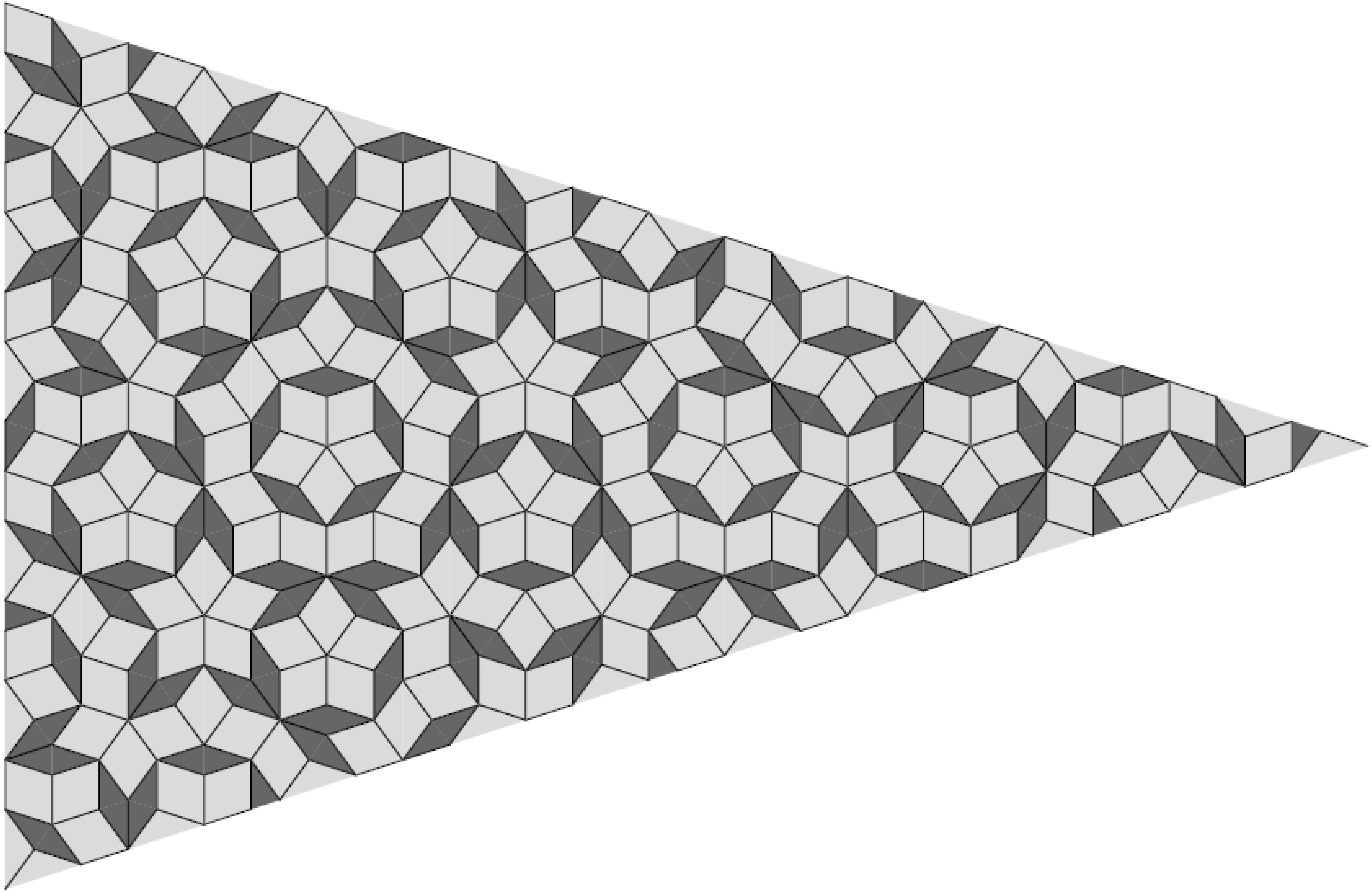
非线性物理：元胞自动机



- 二类是**rhombs**，边长全为**1**，但是夹角为**π/5**的整数倍。这样的图形有两种。拼接时要求同类相接，而且每边取向必符合要求。

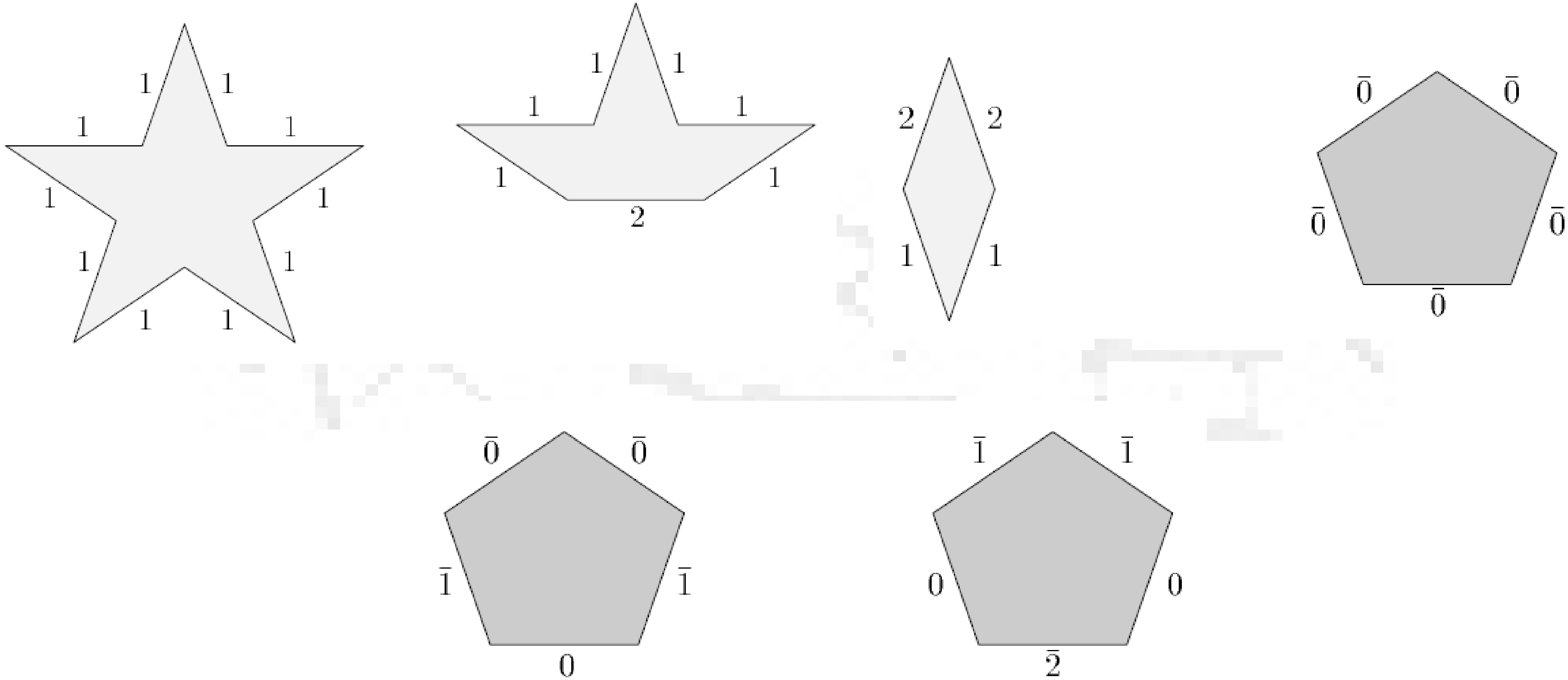


非线性物理：元胞自动机

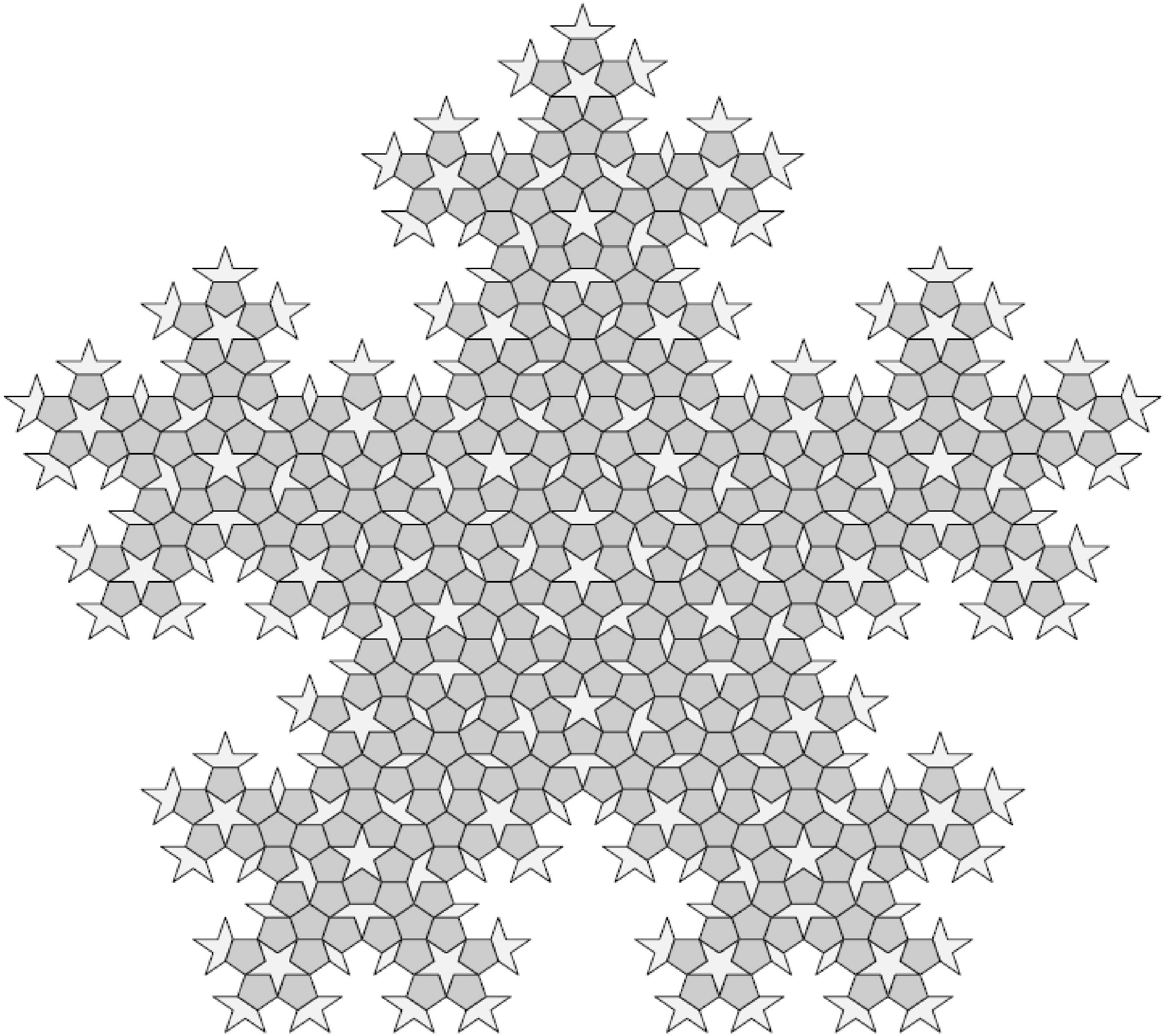


非线性物理：元胞自动机

- 三类是**pentacles**，边长全为**1**，夹角为**π/5**的整数倍。这样的图形有四种。拼接时要求同类相接，而且还要同标签相接。

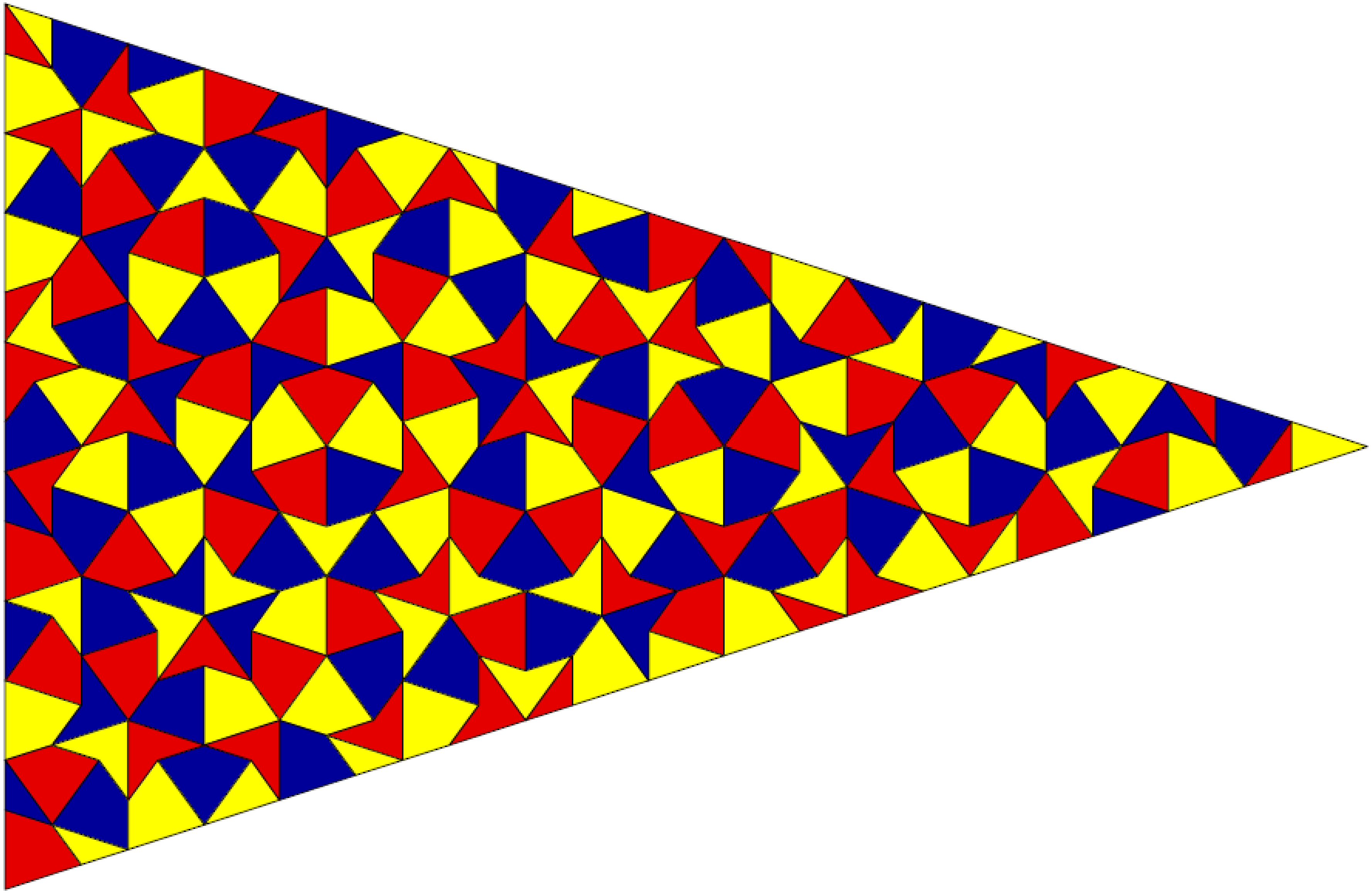


非线性物理：元胞自动机

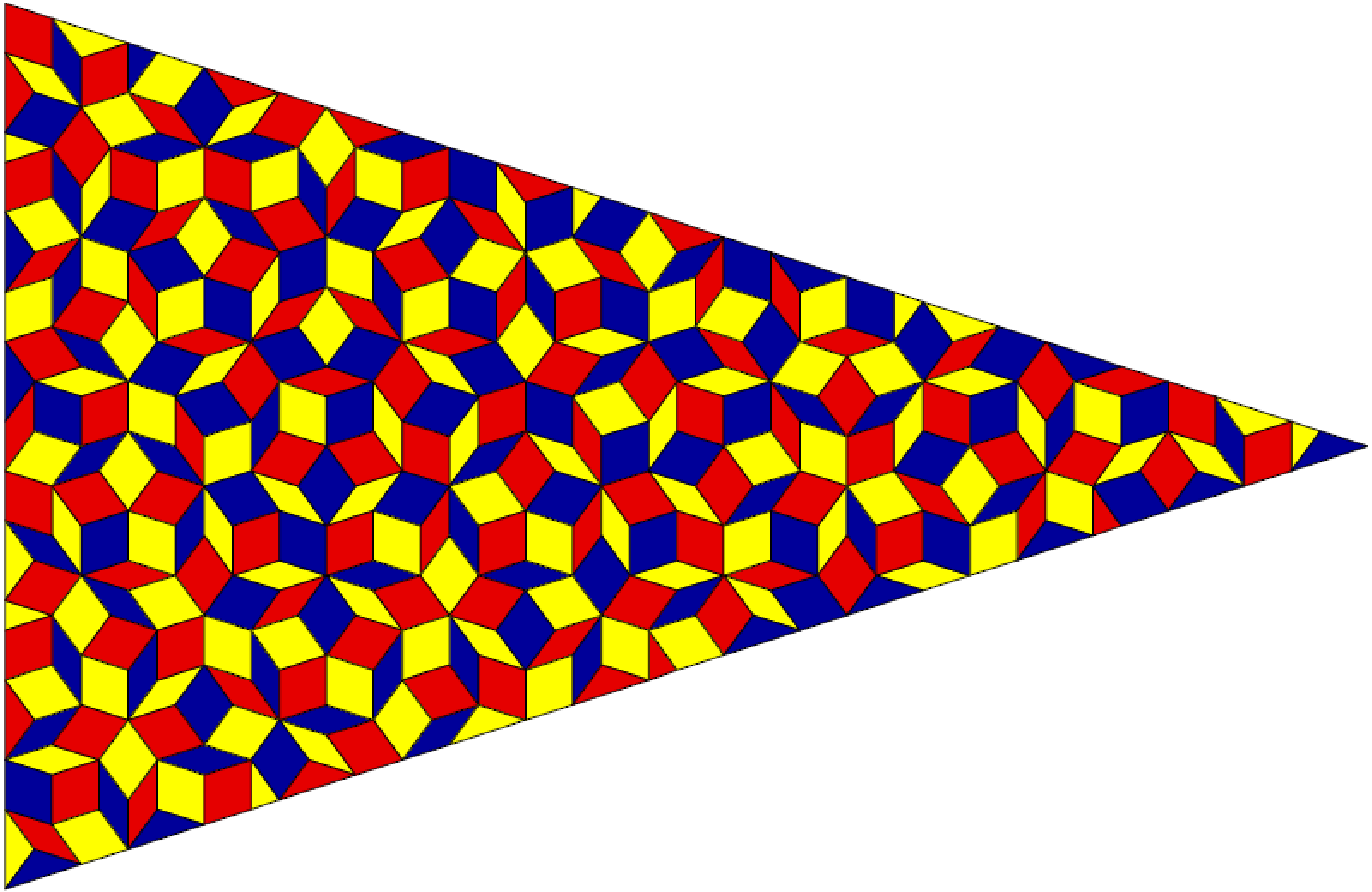


- 三色问题对于前两类已经有答案，**Sibley and Wagon**证明了**rhombs**拼盘，而**Babilon**证明了**kites**和**darts**拼盘。剩下**pentacles**拼盘没有获得证明。
- 先看看前两类的结果，再说元胞自动机证明的方案。

非线性物理：元胞自动机



非线性物理：元胞自动机



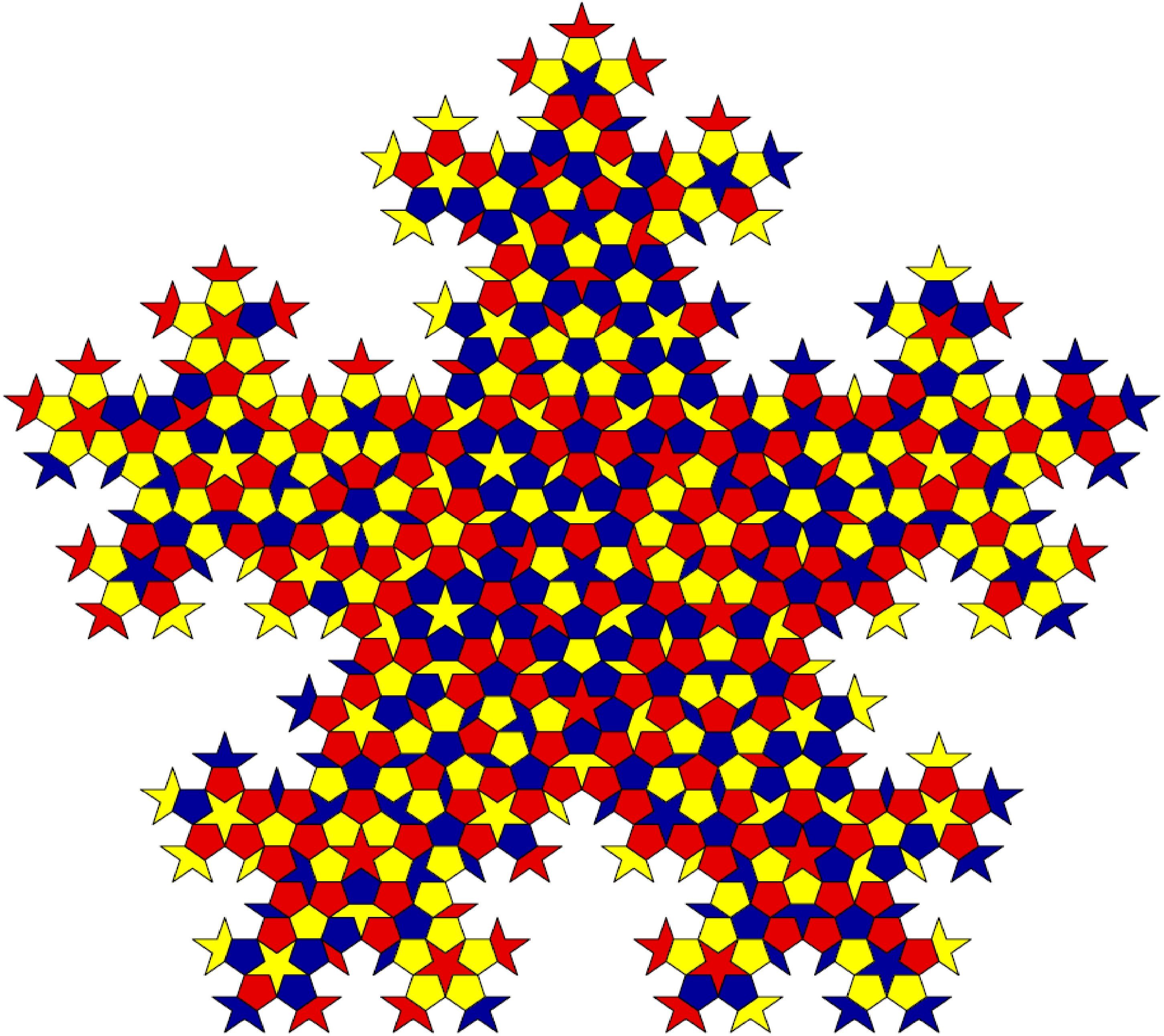
- 利用元胞自动机解决这一问题很简单，通过随机赋三态值1，2，3，然后按照同步规则演化，最终达到三色问题。规则如下：

- If the value of a cell (or tile) equals the value of a bordering cell that is closer to the origin (as measured by some arbitrary point chosen within each tile), then with 90% probability, the cell changes value randomly to one of the other two colors.

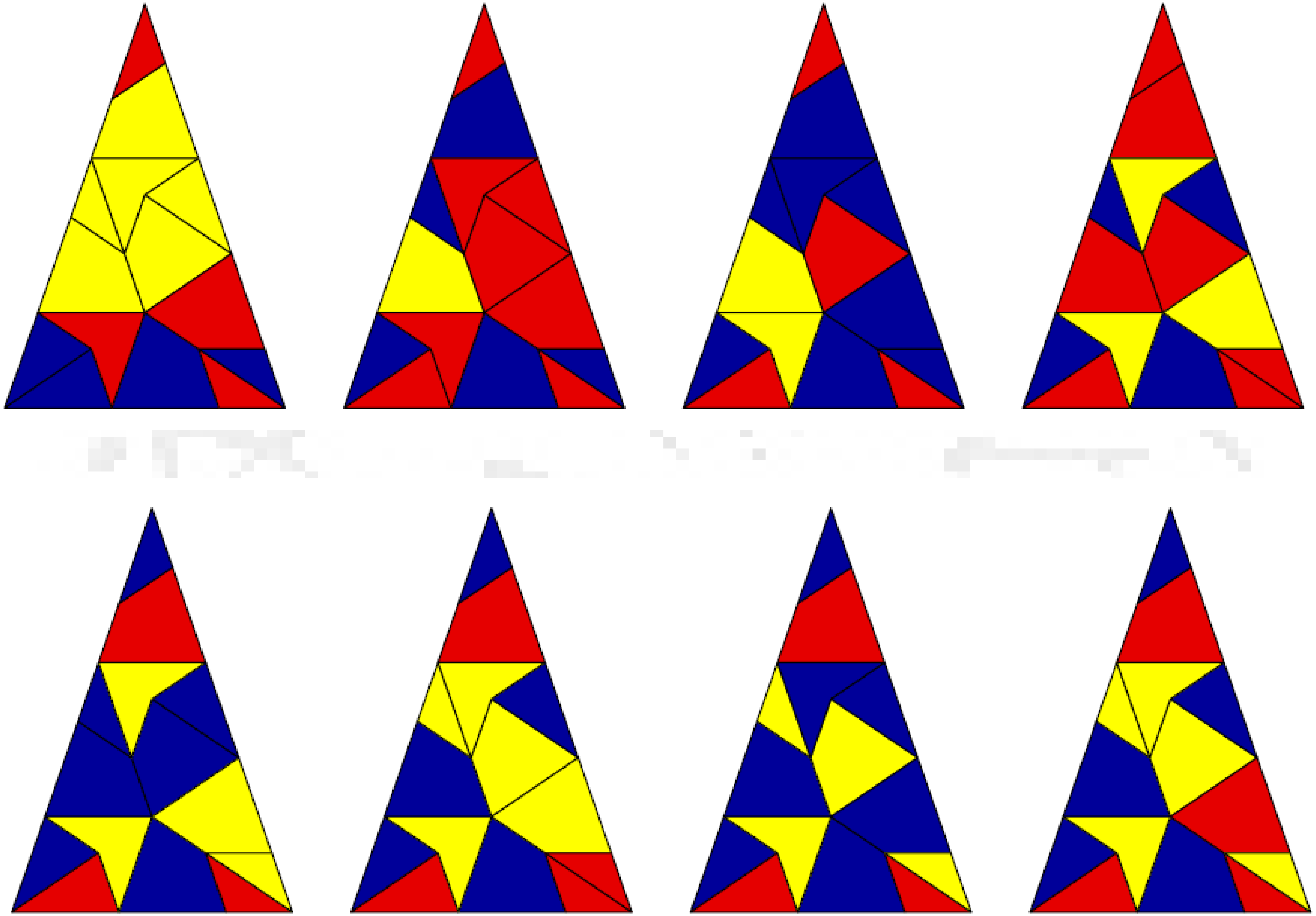
- If the value of a cell does not equal the value of a bordering cell that is closer to the origin, but does equal the value of a cell farther away from the origin, then with 10% probability, the cell changes value.

- If the value of the cell does not equal the value of any bordering cell, the cell does not change value.

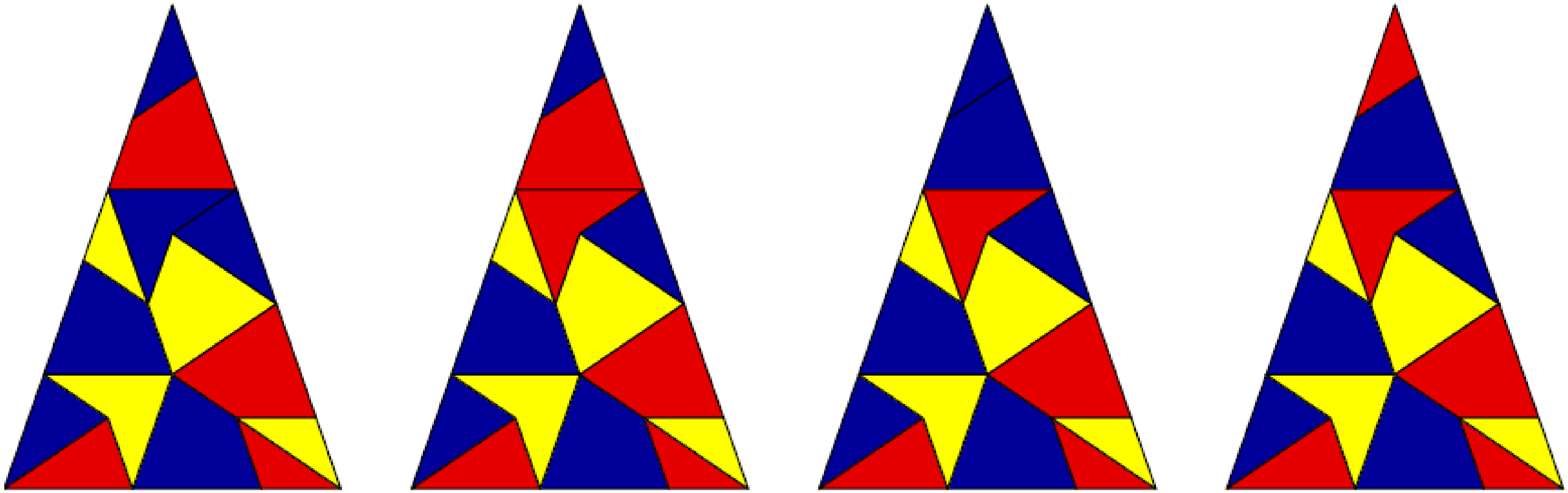
非线性物理：元胞自动机



- 这一方法对所有拼盘都有效。对kite拼盘的上色演化过程：

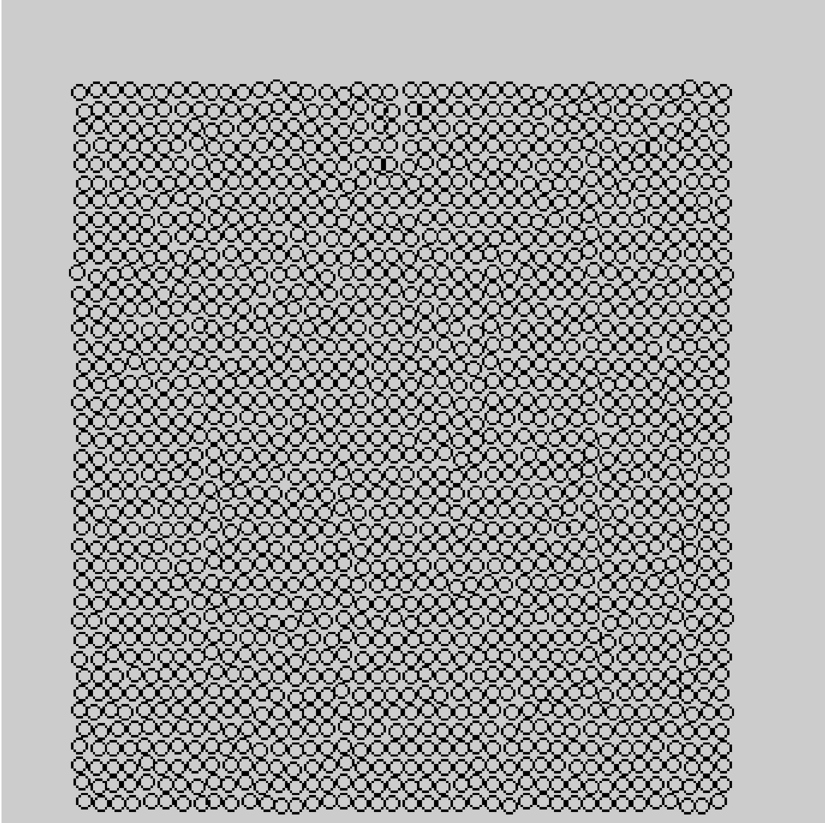


非线性物理：元胞自动机



简单系统模拟：物理基础要点

- 作为元胞自动机的初步，我们给出了一些应用的直观过程。但是这远远不是元胞自动机物理的全部。
- 物理学中的状态量是连续的，总是需要建立元胞自动机规则与实际物理过程的物理联系，这才是真正的物理。
- 限于时间，我们不再讨论元胞自动机。对此有兴趣的同学可参考相关参考书。



简单系统模拟：作业

- 模拟前面介绍的砂堆过程。
- 对于有冲突的情况，只需要进行等概率选择就可以了。